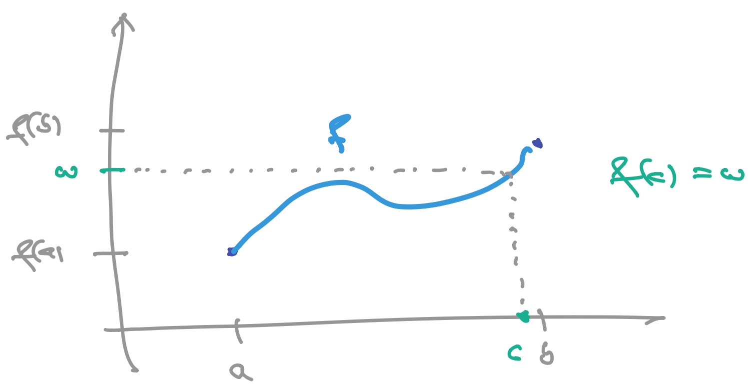
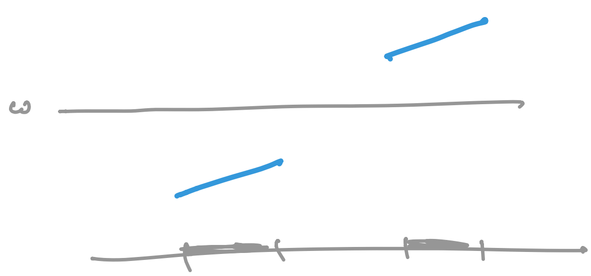
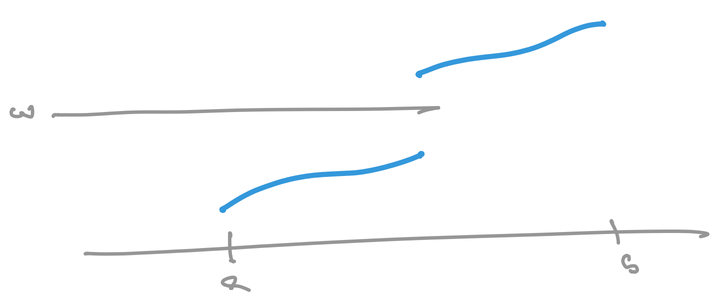
14. Vorlesung 18. 12. 20

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$







Bew.: $f(a) < w < f(b)$

Betrachte

$$A := \{ t \in [a,b] : f(t) < w \} \subset [a,b]$$

$A \neq \emptyset$, denn $a \in A$.

A beschränkt, da $A \subset [a,b]$.

Es ex. also

$$c = \sup A,$$

und offensichtlich

$$a < c \leq b.$$

Approx. satz: es ex. (t_n) in A mit

$$t_n \longrightarrow c$$

Dafür gilt $f(t_n) < w$

also:

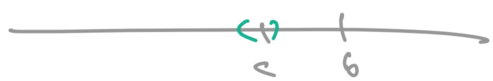
$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) \underset{\text{stet.}}{=} f(\lim t_n) = f(c) \leq w.$$

Want: $f(c) = w$.

Suppose $w < f(b)$ [illegible] $c \neq b$.

Then [illegible] $c < b$.

Since $f(c) < w$, [illegible] [illegible] [illegible] f and [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $U_\delta(c) \subset (a, b)$ [illegible], and that [illegible] $f(t) < w$, $t \in U_\delta(c)$



[illegible] [illegible] $c <$ [illegible] [illegible] ? [illegible]

$f(a) f(b) < 0$

$$\boxed{\begin{gathered} f(a) < 0 < f(b) \\ \text{or} \\ f(a) > 0 > f(b) \end{gathered}}$$

$w = 0$

Bsp: $p(t) = t^{2n+1} + a_{2n} t^{2n} + \dots + a_1 t + a_0$

Jedes Polynom von ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle:

Bew:

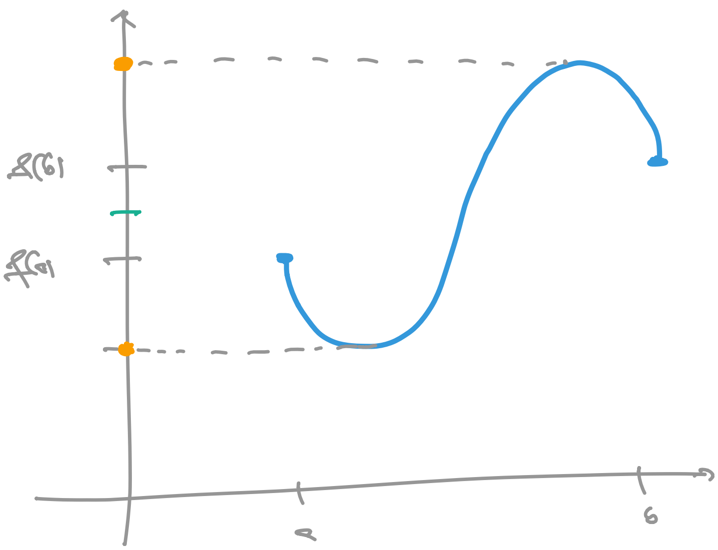
$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} p(t) = -\infty$$

Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$:

$$p(a) < 0, \qquad p(b) > 0$$

Gegen Bsp: $p(t) = 1 + t^2 > 0, \ t \in \mathbb{R}$.

Hat keine reelle NS.



$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\sup_I f := \sup f(I) = \sup \{ f(t) : t \in I \} \leq \infty$

$\inf_I f := \qquad\qquad \geq -\infty$

Bem: Sei

$$\inf_I f < w < \sup_I f \quad , \text{ also } w \in \mathbb{R}$$

Dann ex. Punkte $a, b \in I$ mit

$$f(a) < w < f(b)$$

Betrachte $[a, b]$ für $a < b$
$[b, a]$ für $a > b$

und darauf f: Bolzano:

es gibt c zwischen a und b mit $f(c) = w$. $\square$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I Intervall,
f stetig,

Dann $f(I) = \{ f(t) : t \in I \}$
wieder ein Intervall.

Proof: Because $f(I)$ has more than 1 point, ✓

Suppose, we pick two points $u, v \in f(I)$.

Then:

$$u = f(a), \quad v = f(b), \quad a, b \in I$$

Then $[a, b] \subset I$, I is interval.

Also restrict f join that points $f(a)$ and $f(b)$ are:

$$[\underset{\substack{\shortparallel \\ u}}{f(a)}, \underset{\substack{\shortparallel \\ v}}{f(b)}] \subset f(I).$$

$f: I \to \mathbb{R}$

<u>injektiv</u>: $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

$w \in f(I)$: dann ex. <u>genau</u> ein $c \in I$: $f(c) = w$

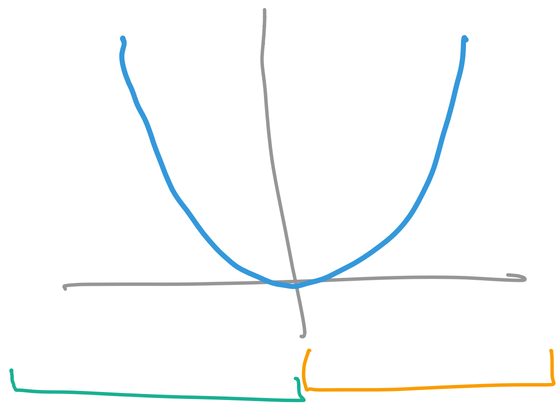
Also $f^{-1}(w) = c$.

Bew: $f(f^{-1}(w)) = f(c) = w$.

<u>Bsp</u>: 1. Jede konstante Fkt $f \mapsto c$ ist monoton steigend und fallend, aber <u>nicht</u> <u>streng</u>.

2. Die Identität. $f(x) = x$ ist streng monoton steigend.

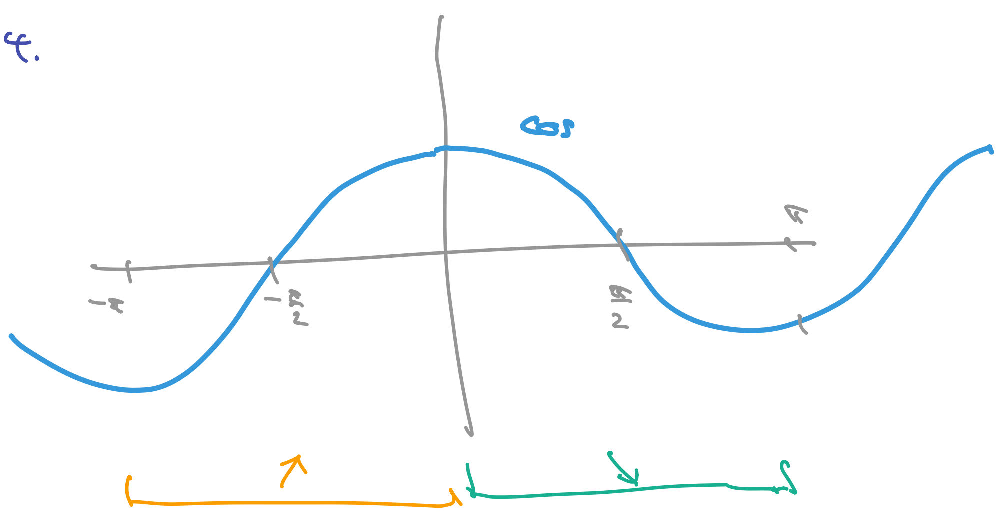
3. $f \; t \mapsto t^2$



def $(-\infty, 0]$ they match funct

def $[0, \infty)$ " " right.

4.



$f: I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton.

1. Dann offensichtlich injektiv, also umkehrbar: f^{-1} ex.

2. f stetig: dann $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall.

Also: $\underbrace{f^{-1}: J \to I \subset \mathbb{R}}_{\text{stetig, streng monoton}}$.

Beweis: Sei etwa $f \nearrow$

(i) f ist injektiv (s.o.)

auf $J = f(I)$ surjektiv, also

$f^{-1}: J \to I$ wohldefiniert.

Zeige

$$t_1 \geq t_2 \Longrightarrow s_1 = f(t_1) \geq s_2 = f(t_2)$$

Kontraposition:

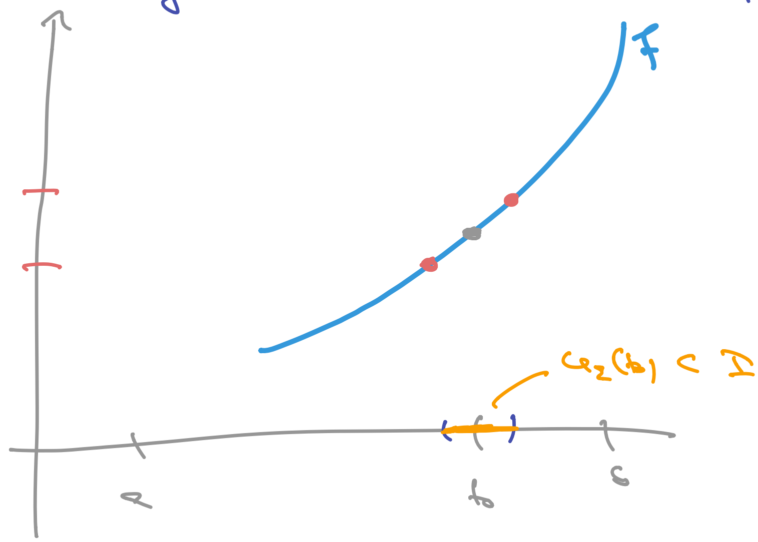
$$s_1 = f(t_1) < s_2 = f(t_2) \Longrightarrow \underset{f^{-1}(s_1)}{\underset{\|}{t_1}} < \underset{f^{-1}(s_2)}{\underset{\|}{t_2}}$$

Also:

$$s_1 < s_2 \Longrightarrow f^{-1}(s_1) < f^{-1}(s_2).$$

Also f^{-1} streng monoton steigend.

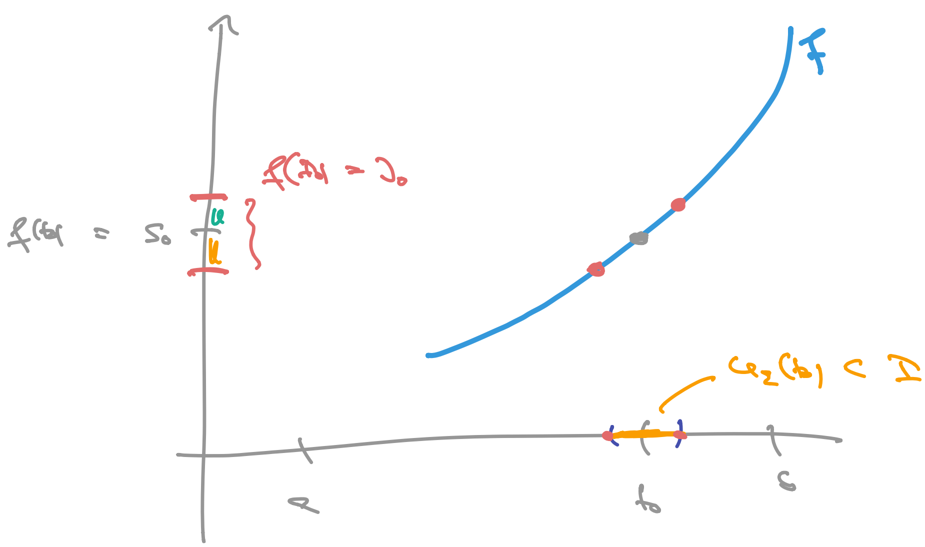
(iii) f^{-1} ist stetig: Sei $t_0 \in I$ fest. Beweis:



$\varepsilon > 0$ klein so: $I_0 = U_\varepsilon(t_0) = (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \subset I$

Beachte an f:

$$J_0 = f(I_0) = (f(t_0-\varepsilon), f(t_0+\varepsilon)) \subset J$$



Wähle

$$\delta = \min\{ s_0 - f(t_0-\varepsilon),\ f(t_0+\varepsilon) - s_0 \}$$

Dann:

$$\delta > 0, \quad U_\delta(s_0) \subset J_0$$

Dann folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(U_\delta(s_0)) \subset f^{-1}(J_0) &= I_0 = U_\varepsilon(t_0) \\ &= U_\varepsilon(f^{-1}(s_0)) \end{aligned}}$$

Also: zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$:

$$f^{-1}(U_\delta(s_0)) \subset U_\varepsilon(f^{-1}(s_0)).$$

Also stetig in s_0. ✓

Proof: Need $[0,\infty)$ and $f: t \mapsto t^n$ strictly increasing

and unbounded :

$$f([0,\infty)) = [0,\infty)$$

Key crucial point:

$$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + v^{n-1}) > 0$$

for $u > v > 0$

Also

$$u > v \implies u^n > v^n.$$ ✓

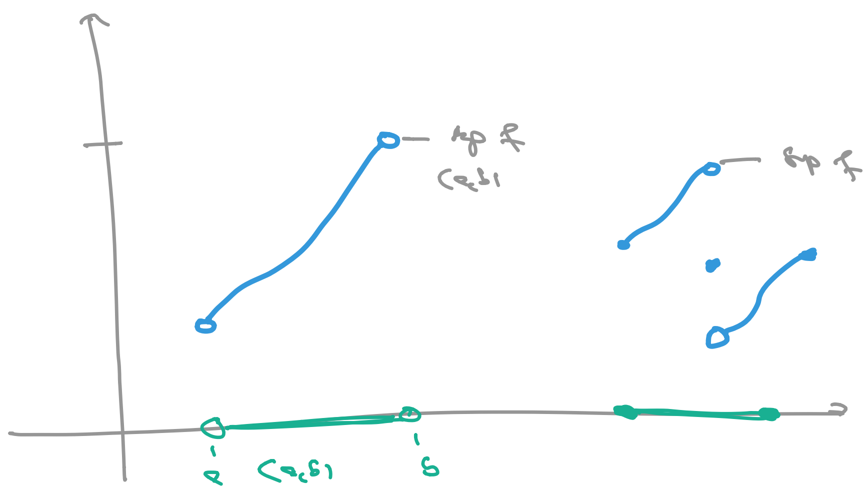
$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(D) \subset \mathbb{R}$

$\sup f(D) =: \sup_D f$ ex. in $\overline{\mathbb{R}}$

Es muss kein $x_0 \in D$ geben mit

$$f(x_0) = \sup_D f$$



Falls $\sup_D f$ angenommen:

also $\sup_D f = f(x_0)$ für ein $x_0 \in D$

dann Maximum bei x_0,

x_0 Maximalstelle.

Beweis: Sei $m = \inf_{[a,b]} f$ (zunächst $-\infty$ zulassen)

Approximationssatz: es ex. Folge $(t_n) \in [a,b]$: beschränkt.

$$f(t_n) \longrightarrow m = \inf_{[a,b]} f .$$

(t_n) ist beschränkt, hat also eine

konv. Teilfolge:

$$t_{n_k} \longrightarrow u .$$

Da $a \leq t_{n_k} \leq b$ für alle t_{n_k}:

$$a \leq u \leq b :$$

$$u \in [a,b]$$

Da f stetig:

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n)$$

$$= m = \inf_{[a,b]} f$$

Also auch $m > -\infty$. $\square$