7

Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man ›in einem Zug und ohne abzusetzen‹ zeichnen kann.

Natürlic 69ies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

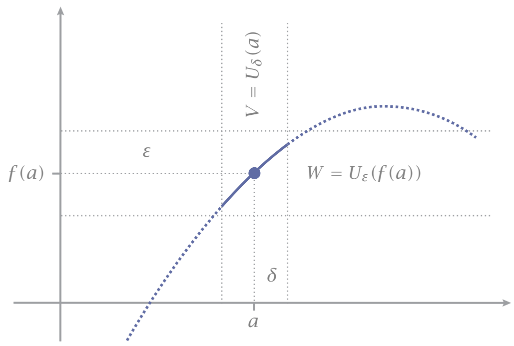
Präziser ist schon folgende Vorstellung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε, so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε-δ-Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab.

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

Abb 1

Im Punkt a stetige Funktion



7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst reelle Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$, wobei D eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dafür schreiben wir auch kurz

$$f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}.$$

Typischerweise ist D ein Intervall, aber dies spielt für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

1 **Definition** *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$t \in D \wedge |t - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \rtimes \tag{1}$$

Drücken wir dies mit Umgebungen aus, so ist eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \quad \Rightarrow \quad f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \tag{2}$$

oder noch kürzer

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{3}$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε-Streifen W um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ-Streifen V um den Urbildpunkt a gibt, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist $_{\text{Abb 1}}$.

Man beachte, dass nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ-Umgebung von a definiert ist.

▹ *Beispiele* A. Jede konstante Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = c,$$

ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig. Das ist trivial.

B. Jede lineare Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = mt + b,$$

ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + |m|}$. Ist dann $|t - a| < \delta$, so wird

$$|f(t) - f(a)| = |mt - ma| \leqslant |m| \, |t - a| < |m| \, \delta < \varepsilon.$$

Dieses δ können wir sogar unabhängig vom Punkt t wählen.

C. Betrachte die Parabel

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = t^2.$$

Aufgrund der zweiten binomischen Formel ist

$$|f(t) - f(a)| = |t^2 - a^2| = |t - a| \, |t + a|.$$

Da es ohnehin nur auf t in einer kleinen Umgebung von a ankommt, können wir von $t \in U_1(a)$ ausgehen, so dass $|t + a| < 1 + 2\,|a|$. Wählen wir also

$$|t - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + 2\,|a|},$$

wobei wir auch noch $\varepsilon < 1$ annehmen, so wird

$$|f(t) - f(a)| < \delta \, |t + a| = \frac{|t + a|}{1 + 2\,|a|} \, \varepsilon < \varepsilon.$$

In diesem Fall hängt also δ sowohl von ε als auch von a ab. ◃

Definition *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt unstetig im Punkt $a \in D$, wenn sie dort nicht stetig ist.* ⋊

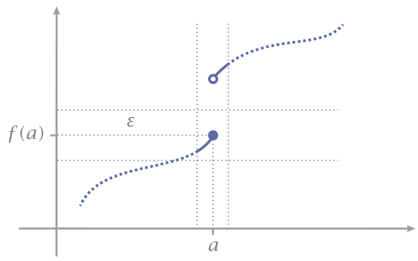
Somit ist f im Punkt a unstetig, wenn es *ein* $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in *jeder* δ-Umgebung von a *wenigstens ein* Punkt $t \in D$ existiert, so dass $f(t)$ *nicht* in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt Abb 2.

Stetigkeit in einem Punkt ist eine *lokale Eigenschaft*. Das heißt, sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Mehr noch, man kann von der Stetigkeit in einem Punkt a *nicht* auf die Stetigkeit in einem anderen Punkt b schließen, auch wenn er noch so nahe bei a liegt. Ein Beispiel hierfür ist die Thomaefunktion A-10.

Nun noch die *globale* Stetigkeit.

Abb 2

Im Punkt a unstetige Funktion



Definition *Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* ⋊

Umgekehrt ist f auf D *unstetig*, wenn sie in wenigstens *einem* Punkt von D unstetig ist. *Ein* unstetiger Punkt genügt also, um die Stetigkeit auf ganz D zu ruinieren.

2 ▷ A. Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

B. Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

ist in 0 unstetig und in allen anderen Punkten stetig.

C. Die Gaußklammer $t \mapsto [t]$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig.

D. Die *Dirichletfunktion*

$$\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

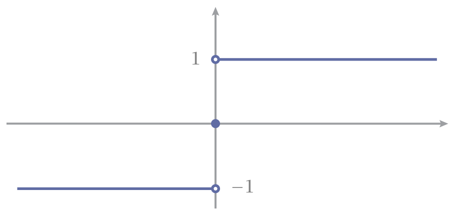
E. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Einschränkung von f auf eine beliebige Teilmenge von D stetig. Für die Stetigkeit ist es daher unerheblich, ob die Definitionsmenge D eine ›schöne‹ Menge ist. ◁

▪ Stetige Abbildungen

Der Begriff der Stetigkeit ist nicht nur für reellwertige Funktionen auf der reellen Geraden erklärt. Er ist auch sinnvoll für Abbildungen zwischen Räumen, in denen in irgendeiner Weise ein Abstand definiert ist. Als erste Verallgemeinerung in diese Richtung definieren wir nun Stetigkeit für Abbildungen zwischen

Abb 3

Signumfunktion



normierten Vektorräumen. Für den Anfang kann man sich darunter den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm vorstellen.

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und

$$f:\ E \supset D \to F$$

eine Abbildung, wobei D eine beliebige Teilmenge von E sein darf. Die Stetigkeitsdefinition 1 überträgt sich auf diese Situation, wenn wir den reellen Betrag durch die entsprechenden Normen ersetzen.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$x \in D \land \|x - a\|_E < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \qquad \rtimes$$

Um dies wie in (2) und (3) durch Umgebungen auszudrücken, sei

$$U_\delta(a) \coloneqq \{x \in E:\ \|x - a\|_E < \delta\},$$
$$U_\varepsilon(b) \coloneqq \{y \in F:\ \|y - b\|_F < \varepsilon\}.$$

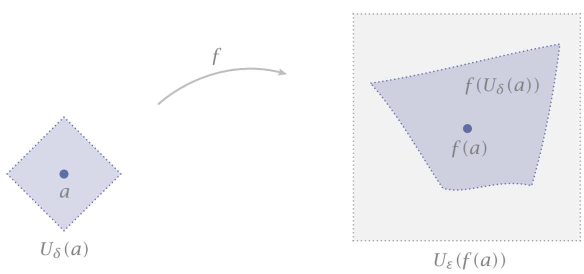
Dann erhalten wir folgende

Äquivalente Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder ε-Umgebung um $f(a)$ eine δ-Umgebung um a existiert, so dass*

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \qquad \rtimes$$

Abb 4

Im Punkt a stetige Abbildung



Für $D \subset \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{R}$ erhalten wir wieder unsere Definition für reelle Funktionen 1. — Globale Stetigkeit ist wie zuvor erklärt:

Definition *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* ⋊

Das Folgenkriterium

Der nächste Satz charakterisiert Stetigkeit mithilfe von Folgen. Dies erlaubt uns, Stetigkeitssätze aus entsprechenden Sätzen über Folgen zu erhalten.

3 **Folgenkriterium** *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \qquad ⋊$$

Wichtig: Dies muss für *jede* Folge in D mit Grenzwert a gelten, nicht nur für eine, die einem gerade gut passt.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und (x_n) eine beliebige gegen a konvergierende Folge in D. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Wegen $x_n \to a$ existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\|x_n - a\|_E < \delta, \qquad n \geqslant N.$$

Da alle x_n in D liegen, gilt auch $x_n \in U_\delta(a) \cap D$ für $n \geqslant N$, und wir erhalten

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geqslant 1$ existiert, gilt $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$ Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen, f ist *nicht* stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ einen Punkt $x_n \in U_{1/n}(a) \cap D$ mit

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Wir erhalten eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Negation des Folgenkriteriums 3 ergibt ein handliches

4 **Unstetigkeitskriterium** *Gibt es wenigstens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, so ist f im Punkt a unstetig.* ⋊

▹ *Beispiele* A. Die Gaußklammer ist unstetig in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} [m - 1/n] = m - 1 \neq [m] = m.$$

B. Die Signumfunktion ist unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(-1/n) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(1/n) = 1,$$

aber $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◃

Nun noch die globale Version des Folgenkriteriums. Der Beweis sei als Übung überlassen A-4 .

5 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.* ⋊

Ist also f auf D stetig und konvergiert die Folge (x_n) in D, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also ›lim‹ und ›f‹ vertauschen.

▪ Stetigkeitssätze

Wie bei der Konvergenz von Folgen fragen wir nun, wie sich Stetigkeit mit Körper- und Vektorraumoperationen verträgt. Zuerst betrachten wir reellwertige Funktionen auf einer beliebigen Teilmenge D eines normierten Vektorraums E und die Körperoperationen in $\mathbb{R}$.

6 **Satz** *Sind die Funktionen $f, g: E \supset D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so sind es auch die Funktionen $f + g$ und fg sowie f/g, falls $g(a) \neq 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel f/g. Ist (x_n) eine beliebige Folge in D mit Grenzwert a, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g 3

$$f(x_n) \to f(a), \qquad g(x_n) \to g(a).$$

Wegen $g(a) \neq 0$ gilt dann auch 5.7 $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/g(a)$. Das ist gleichbedeutend mit

$$(f/g)(x_n) \to (f/g)(a).$$

Da dies für jede solche Folge gilt, ist f/g in a stetig 3 . Alles Übrige beweist man genauso. ⟩⟩⟩⟩⟩

7 **Korollar** *Sind die Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so sind es auch $f + g$ und fg sowie f/g, falls $g \neq 0$ auf ganz D.* ⋊

Bemerkung Aufgrund dieses Satzes bildet der Raum

$$C(D) \coloneqq \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } D\}$$

einen linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Da auch das Produkt zweier Elemente in ihm erklärt ist und wieder zu $C(D)$ gehört, ist er sogar eine Algebra. ⊸

▹ *Beispiel* Aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion folgt $_6$ die Stetigkeit aller *Polynome*, also Funktionen $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + .. + a_1 t + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, .., a_n$. ◃

Für Abbildungen in einen beliebigen normierten Vektorraum F sind lediglich Linearkombinationen erklärt. Der entsprechende Satz lautet hier $_{5.37}$:

8 **Satz** *Sind die Abbildungen $f, g\colon E \supset D \to F$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist es auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g\colon D \to F$. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit auf ganz D.* ⋊

Wir betrachten nun die Komposition zweier stetiger Abbildungen. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass diese Komposition wohldefiniert ist.

9 **Satz** *Die Komposition $g \circ f$ sei auf D wohldefiniert. Ist f stetig im Punkt $a \in D$ und g stetig im Punkt $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig im Punkt a.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei (x_n) eine konvergente Folge in D mit $x_n \to a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(x_n) \to f(a)$ $_3$. Dann gilt auch $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$ $_3$. Somit gilt auch

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a).$$

Da dies für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt, ist $g \circ f$ im Punkt a stetig. ⟫⟫⟫

10 **Korollar** *Ist f stetig auf D und g stetig auf einer Obermenge von $f(D)$, so ist auch $g \circ f$ stetig auf D.* ⋊

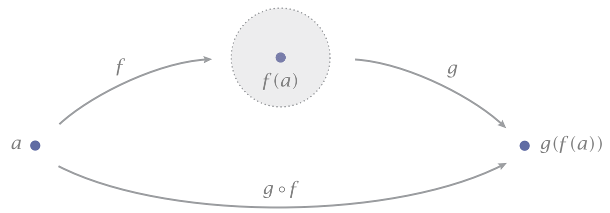
▹ Die Funktion

$$t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Denn das Polynom $1 + t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ, und die Wurzel ist auf $[0, \infty)$ ebenfalls stetig – wie wir noch in Abschnitt 2 sehen. ◃

Abb 5

Komposition von f und g



Lipschitzstetige Abbildungen

Eine wichtige und sehr handliche Klasse stetiger Abbildungen bilden die *lipschitzstetigen* Abbildungen.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt lipschitzstetig auf D, wenn es eine Konstante $L \geqslant 0$ gibt, genannt Lipschitzkonstante, so dass*

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E\,, \qquad u, v \in D.$$

Eine solche Funktion mit Lipschitzkonstante L heißt auch L-lipschitz. ⋊

Bemerkungen *a.* Mit L ist auch jede reelle Zahl $L' \geqslant L$ eine Lipschitzkonstante.

b. Ist f lipschitz auf D, so ist

$$L_* = \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E} < \infty,$$

und dies ist auch die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D A-15.

c. Lipschitzstetige Funktionen heißen auch *dehnungsbeschränkt*, was diese Eigenschaft recht anschaulich beschreibt. ⊸

Die Berechtigung der Bezeichnung ergibt sich aus dem nächsten Lemma.

11 **Lemma** *Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei f L-lipschitz. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon/(L+1) > 0$. Für alle u, v im Definitionsbereich von f mit $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E < L\delta = \frac{L}{L+1}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Da δ unabhängig vom betrachteten Punkt ist, folgt daraus die Stetigkeit von f auf dem gesamten Definitionsbereich. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Auf jedem normierten Raum sind konstante Funktionen 0-lipschitz, und die Identität ist 1-lipschitz.

B. Auf jedem normierten Raum ist die Norm $\|\cdot\|$ 1-lipschitz, denn dies ist gerade die umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leqslant \|u - v\|\,.$$

Insbesondere ist die Betragsfunktion $|\cdot|$ 1-lipschitz auf $\mathbb{R}$.

C. Auf $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen

$$z \mapsto \Re z, \qquad z \mapsto \Im z, \qquad z \mapsto \bar{z}$$

sämtlich 1-lipschitz. Zum Beispiel ist

$$|\Im z - \Im w| = \left|\frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} - \frac{w - \bar{w}}{2\mathrm{i}}\right| \leqslant \frac{|z - w| + |\bar{z} - \bar{w}|}{2} = |z - w|\,.$$

D. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* lipschitz, denn für $u > v = 0$ ist

$$\frac{|u^2 - v^2|}{|u - v|} = \frac{|u^2|}{|u|} = |u|$$

nicht beschränkt. Sie ist aber lipschitz auf jedem beschränkten Intervall A-13. ◁