13. Vorlesung 16. 12. 20

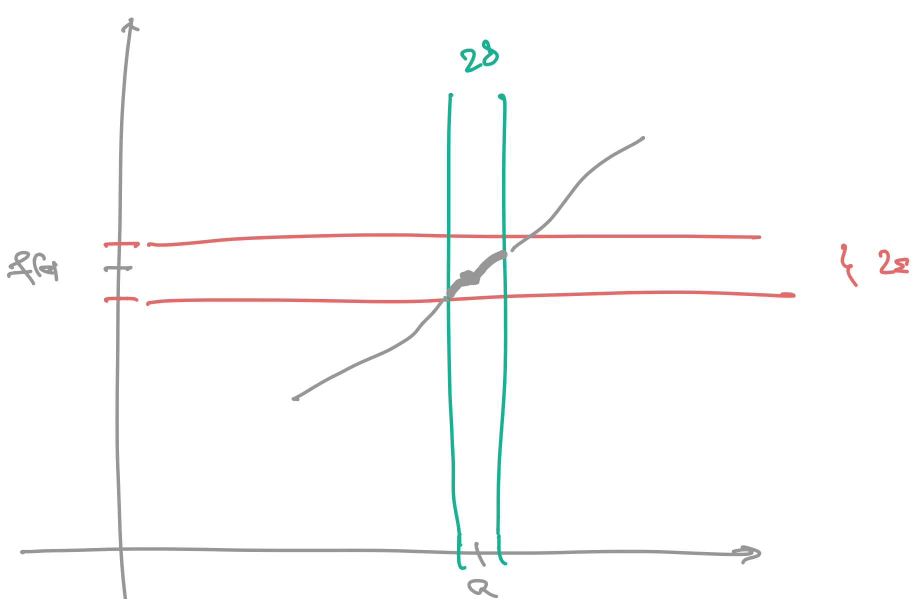
$f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in D$

f stetig in a :

zu jedem $\varepsilon > 0$ ex $\delta > 0$:

$t \in U_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(t) \in U_\varepsilon(f(a))$



Bem:

$\neg$ (für alle ... gilt ...)

$\iff$ es gibt ... so dass $\neg$ ...

$\neg$ (es gibt ... so dass ....)

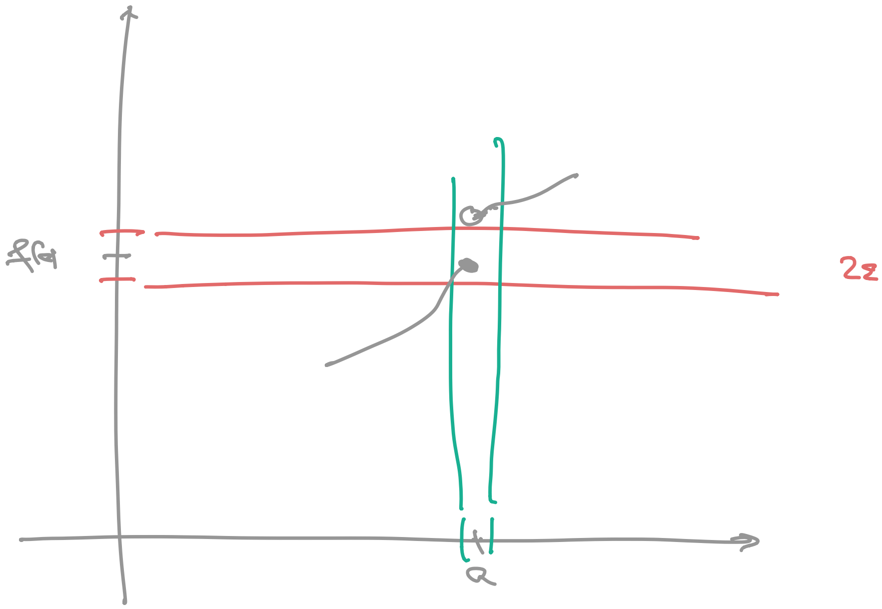
$\iff$ für alle ... gilt $\neg$ ...

---

es gibt $\varepsilon > 0$: so dass für alle $\delta > 0$:

es gibt $x \in U_\delta(a) \cap D$:

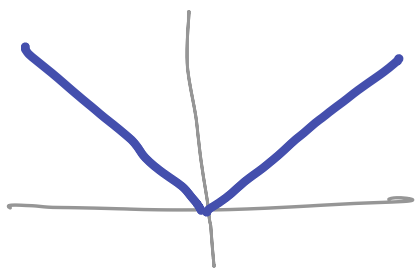
$f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$.



unstetig auf D : unstetig in mindestens einem Punkt $a \in D$.

Bsp: 1. Betragsfunktion:

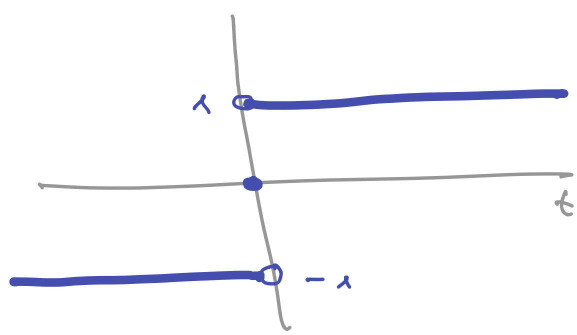
$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto |t|$



stetig auf $\mathbb{R}$.

2. Vorzeichenfunktion:

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

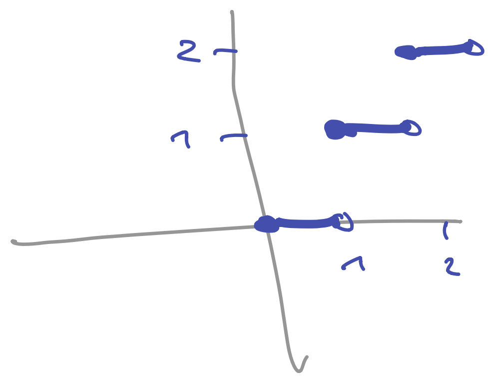


stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

unstetig in 0.

3. Gaußklammer:

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [x]$$



stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

unstetig in jedem Punkt aus $\mathbb{Z}$.

4. Dirichletfunktion:

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$.

ist nirgends stetig.

5.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$A \subset D$$

$$f|_A : A \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Ist f auf D stetig, dann ist $f|_A$ auf A stetig.

Terminologie :

Functie : waarden in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$

Afbeelding : waarden in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

een in VR E

$$\begin{array}{ccccc} & \|\cdot\|_E & & & \|\cdot\|_F \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ f : & E \supset D & & \longrightarrow & F \end{array}$$

Afbeelding.

$a \in D$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ is in punt } a \in D \text{ [illegible]}: \\ \text{tot gegeven } \varepsilon > 0 \text{ ex. } \delta > 0 : \\ \underline{x} \in D \wedge \|x-a\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon \end{array}}$$

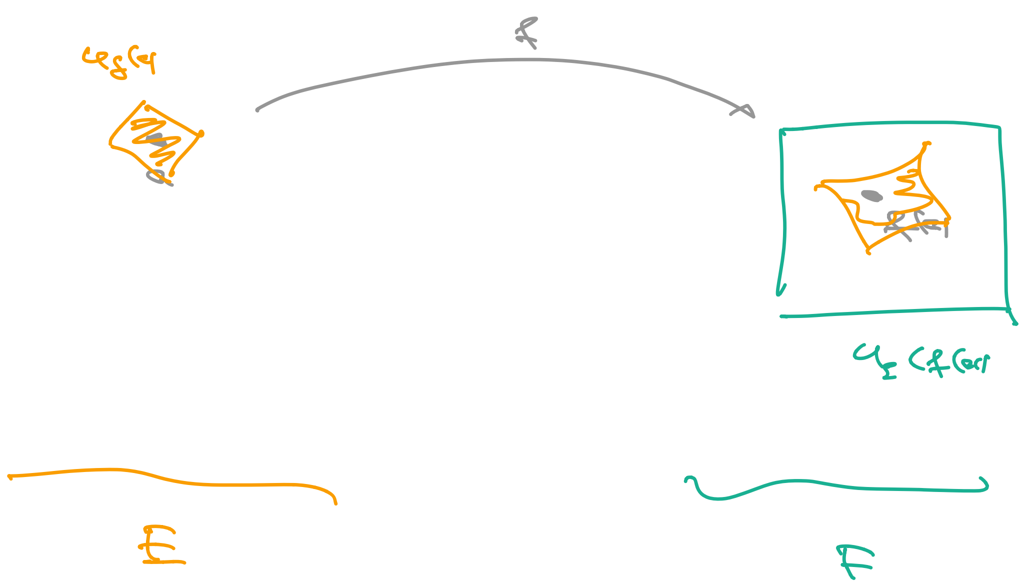
$a \in E$: $\quad U_\delta(a) := \{ x \in E : \|x - a\|_E < \delta \}$

$b \in F$: $\quad U_\varepsilon(b) := \{ y \in F : \|y - b\|_F < \varepsilon \}$

f stetig in a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$

ein $\delta > 0$ ex.:

$$f\left(U_\delta(a) \cap D \right) \subset U_\varepsilon(f(a))$$



Beweis: $\Rightarrow$ Sei f stetig in $a \in D$.

Sei (x_n) beliebige Folge in D

mit $x_n \to a$

z.z.: $f(x_n) \to f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\delta > 0$:

$$\| f(x) - f(a) \|_F < \varepsilon , \quad x \in U_\delta(a) \cap D .$$

Wegen $x_n \to a$ ex. zu $\delta > 0$ ein $N \geq 1$:

$$\| x_n - a \|_E < \delta , \quad n \geq N .$$

Und es gilt: $x_n \in D$ also:

$$x_n \in U_\delta(a) \cap D , \quad n \geq N$$

$$\Big\downarrow f$$

$$U_\varepsilon(f(a))$$

Also:

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(f(a))$$

$$\| f(x_n) - f(a) \|_F < \varepsilon , \quad n \geq N .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $N \geq 1$:

Also: $f(x_n) \to f(a)$.

"$\Leftarrow$" Genauer: Kontraposition:

Angenommen, f ist nicht stetig in a.

Z.z.: es gibt Folge (x_n) in D und

$x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$.

Da f nicht stetig in a: Es gibt ein $\varepsilon > 0$,

so dass für jedes $n \geq 1$ $(\delta = \frac{1}{n})$

ein Punkt $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap D$ mit

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

Damit haben wir Folge (x_n) in D:

$x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$ $\square$

Bsp: Gaußklammer $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

unstetig in jedem Punkt $a = m \in \mathbb{Z}$:

Betrachte z.B.

$$x_n = m - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2$$

Dann gilt

$$x_n \nearrow m$$

$$f(x_n) = \left[m - \tfrac{1}{n}\right] = m - 1$$

$$f(m) = [m] = m$$

Also:

$$f(x_n) = m - 1 \not\to f(m) = m.$$

$\square$

Bew.: 2.3: $\frac{f}{g}$.

Sei (x_n) beliebige Folge in D,

$x_n \to a$.

Da f und g stetig in a:

$$\left.\begin{aligned} f(x_n) &\to f(a) \\ g(x_n) &\to g(a) \neq 0 \end{aligned}\right\} \text{ zwei reelle Folgen}$$

Also:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} & \longrightarrow & \dfrac{f(a)}{g(a)} \\ \| & & \| \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_n) & \longrightarrow & \left(\dfrac{f}{g}\right)(a) \end{array}$$

Also $\frac{f}{g}$ erfüllt Folgenkriterium.

Bem.: Sei $D \subset E$ beliebig.

$$C(D) := \{ f : D \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

continuous

ist ein Unterraum über $\mathbb{R}$:

$$f, g \in C(D)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda f + \mu g \in C(D)$$

Außerdem $f \cdot g \in C(D)$: Algebra.

Bsp.: Alle Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig:

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$: $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$:

da: $f(t) = \text{const}$ stetig

$f(t) = t$ stetig

$f : E \supset D \longrightarrow F$

$g : F \supset W \longrightarrow G$, $\quad W \supset f(D)$

Dann

$g \circ f : D \longrightarrow G$.

Beweis: Sei f stetig in a

g stetig in $f(a)$.

Sei $x_n \longrightarrow a$.

Dann: $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ in $f(D)$

Also dann:

$$g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(a)) \text{ in } G.$$

$$\|$$

$$(g \circ f)(x_n) \longrightarrow (g \circ f)(a).$$

∎

Bsp.: $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$: stetig auf $\mathbb{R}$.

$g \circ f$: $f(t) = 1+t^2 \geq 1$

$g(t) = \sqrt{t}$, $t > 0$

Bem.: 1. Ist C eine, jede $C' \geq C$ eine Lipschitzkonstante.

2. Ist f Lipschitz:

$$L_f = \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u-v\|_E} < \infty$$

ist Lipschitzkonstante für f, und zwar die kleinstmögliche.

Beweis: Sei f L-Lipschitz.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle

$$\delta = \frac{\varepsilon}{L+1} > 0$$

($L+1$ für den Fall $L = 0$)

Für $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leq L\, \|u - v\|_E$$

$$< L \cdot \delta = \frac{L}{L+1} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

☒

Bem: δ unabhängig von u und v.

Daher f gleichmäßig stetig.

Bsp: 1. Auf jedem normierten Raum E:

$$f(x) = c \qquad \text{0-Lipschitz}$$

Identität: $\quad f(x) = x \qquad$ 1-Lipschitz:

$$\|x-y\| \leq 1 \cdot \|x-y\|$$

2. Normierter Raum E:

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1-Lipschitz:

$$\big|\, \|u\| - \|v\| \,\big| \leq 1 \cdot \|u-v\| \quad , \quad u,v \in E$$

3. $$\left.\begin{array}{l} z \mapsto \operatorname{Re} z \\ z \mapsto \operatorname{Im} z \end{array}\right\} \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lipschitz mit $L=1$:

$$|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w| = \left| \frac{z-\bar{z}}{2i} - \frac{w-\bar{w}}{2i} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \big(|z-w| + |\bar{z}-\bar{w}| \big) = |z-w|$$

4. Beispiel: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x^2 =: f(x)$

nicht Lipschitz auf $\mathbb{R}$:

$$\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|}$$

$$= \frac{|u^2-v^2|}{|u-v|} = |u+v| \quad \text{unbeschränkt auf } \mathbb{R}$$

beschränkt für $u,v \in [a,b]$,

D.h.: $f: x \mapsto x^2$ Lipschitz auf jedem Intervall $[a,b]$

nicht Lipschitz auf $\mathbb{R}$.

∎