11 **Quotientenkriterium** *Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und konvergiert die Folge sukzessiver Quotienten mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Im ersten Fall gibt es ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $|a_{n+1}| \leqslant q\,|a_n|$ für $n \geqslant N$. Mit Induktion folgt hieraus

$$|a_n| \leqslant q^{n-N}\,|a_N| = cq^n, \qquad n \geqslant N,$$

mit der Konstanten $c = q^{-N}\,|a_N|$. Also ist $\sum_n cq^n$ eine konvergente Majorante. Im anderen Fall gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass $|a_n| \geqslant |a_{n-1}| \geqslant .. \geqslant |a_N| > 0$ für $n \geqslant N$. Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. ⟩⟩⟩⟩

12 ⊳ Die *Exponenzialreihe*

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ..$$

ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Für $z = 0$ ist dies trivial, und für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch mit dem Wurzelkriterium, denn

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0, \qquad n \to \infty.$$ ⊲

Konvergieren im Wurzel- und Quotientenkriterium die entsprechenden Ausdrücke gegen 1, so ist völlig offen, wie sich die Reihe verhält. Dann müssen andere Kriterien herangezogen werden, wie zum Beispiel das

13 **Verdichtungskriterium** *Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann haben die beiden Reihen*

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}.$$

dasselbe Konvergenzverhalten. Das heißt, beide Reihen sind entweder absolut konvergent oder divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $m \geqslant 0$. Auf Grund der Monotonie der a_n gilt

$$\sum_{2^m<k\leqslant 2^{m+1}} a_{2^{m+1}} \leqslant \sum_{2^m<k\leqslant 2^{m+1}} a_k \leqslant \sum_{2^m<k\leqslant 2^{m+1}} a_{2^m},$$

also

$$2^m a_{2^{m+1}} \leqslant \sum_{2^m<k\leqslant 2^{m+1}} a_k \leqslant 2^m a_{2^m}.$$

Summieren wir über $m = 0, .., n$, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=2}^{2^{n+1}} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

Konvergiert die rechts stehende Reihe, so konvergiert auch $\sum_k a_k$. Konvergiert letztere Reihe, so konvergiert auch die linke Seite, und damit auch wieder die rechte Seite. Im Fall der Divergenz argumentiert man ebenso. Somit haben beide Reihen dasselbe Konvergenzverhalten. ⟩⟩⟩⟩⟩

14 ▷ Betrachte die *allgemeine harmonische Reihe*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ..$$

für $\alpha > 0$ [1]. Das Wurzel- und das Quotientenkriterium sind nicht anwendbar, denn

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to 1$$

und

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1.$$

Ihre verdichtete Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-\alpha n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

[1] Reelle Exponenten werden später erklärt. Im Moment genügt es, α als ganzzahlig anzunehmen.

Wegen $2^{1-\alpha} < 1$ für $\alpha > 1$ konvergiert die allgemeine harmonische Reihe also für $\alpha > 1$. Ihre Divergenz für $\alpha \leqslant 1$ ist ohnehin klar, da dann die harmonische Reihe eine divergente Minorante ist. ◅

Die allgemeine harmonische Reihe konvergiert langsamer als die geometrische Reihe. Als Majorante liefert sie daher ein Konvergenzkriterium, dass in Situationen hilft, wo das Wurzel- oder Quotientenkriterium keine Aussage ermöglichen. Dies führt zum

15 **Raabe-Kriterium** *Eine Reihe $\sum_n a_n$ mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn es ein $\alpha > 1$ gibt, so das*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$$

für fast alle n. Gilt dagegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

für fast alle n, so ist die Reihe divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Gilt die Ungleichung für alle $n \geqslant N$, so folgt induktiv

$$a_{n+1} \leqslant a_N \prod_{k=N}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Also gilt mit einer hinreichend großen Konstanten c für *alle* n

$$a_{n+1} \leqslant c \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Es gilt aber

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}, \qquad n \geqslant 1.$$

Für $n = 1$ ist dies richtig, und der Induktionsschritt von $n-1$ auf n reduziert sich auf

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Dies ist aber äquivalent zur Bernoullischen Ungleichung

$$1 - \frac{\alpha}{n} \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Somit ist ein Vielfaches der allgemeinen harmonischen Reihe eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n$. Die Divergenzbehauptung folgt analog. ⟩⟩⟩⟩

Beispiel Betrachte die Reihe

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n+2)}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4}.$$

Da dieser gegen 1 konvergiert, ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar. Wegen

$$\frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} \leqslant 1 - \frac{4}{3n}, \qquad n \geqslant 16,$$

ist aber das Raabe-Kriterium anwendbar, die Reihe also konvergent.

Die bisherigen Konvergenzkriterien betreffen die absolute Konvergenz. Die bedingte Konvergenz ist aufgrund des Umordnungssatzes subtiler. Daher erwähnen wir nur das einfachste Kriterium für sogenannte *alternierende Reihen*. Dies sind *reelle* Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots$$

mit $a_n \geqslant 0$ für alle n.

16 **Leibniz-Kriterium** *Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots .$$

⟨⟨⟨⟨ Für die Partialsummen dieser Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} &= a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant 0, \\ s_{2n+2} - s_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0, \\ s_{2n+2} - s_{2n+1} &= a_{2n+2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant \ldots \leqslant s_{2n-1} \leqslant s_{2n+1} \leqslant s_{2n+2} \leqslant s_{2n} \leqslant \ldots \leqslant s_2 \leqslant s_0, \qquad n \geqslant 1.$$

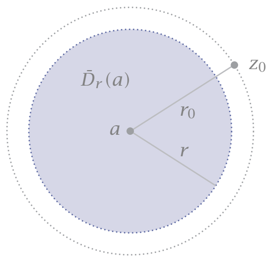
Die ›ungeraden‹ Partialsummen sind also monoton steigend, die ›geraden‹ Partialsummen monoton fallend, und beide sind beschränkt. Somit konvergieren (s_{2n}) und (s_{2n-1}). Wegen

$$0 \leqslant s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \searrow 0$$

haben sie auch denselben Grenzwert. Also konvergiert die gesamte Reihe. ⟩⟩⟩⟩

Abb 1

Absolute und gleichmäßige Konvergenz auf $\bar{D}_r(a)$



17 ▹ Die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium ${}_{16}$, denn $1/n \searrow 0$. Ihr Wert ist übrigens $\log 2$. ◃

6.4 Potenzreihen

Eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

mit komplexen Koeffizienten heißt *komplexe Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt* a. Sind die Koeffizienten a_n und a wie auch die Variable z reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*. Die Theorie für beide Arten von Potenzreihen ist jedoch dieselbe. Wir betrachten daher von vornherein den komplexen Fall und sprechen einfach von *Potenzreihen*.

Bei Potenzreihen stellt sich die Frage der Konvergenz der Reihe eigentlich für jedes einzelne Argument. Tatsächlich sind die Verhältnisse aber wesentlich einfacher.

18 **Lemma** *Konvergiert die Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, *so konvergiert sie auch in jedem Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *mit*

$$|z-a| \leqslant |z_0 - a|. \quad ⋊$$

6.14

Die Konvergenz ist sogar *gleichmäßig* auf jeder Kreisscheibe $|z-a| \leqslant r$ mit $r < |z_0 - a|$. Aber dieser Aspekt wird uns erst später beschäftigen, wenn es um Fragen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit geht.

⟨⟨⟨⟨⟨ Konvergiert ϕ im Punkt z_0, so bilden die Koeffizienten von $\phi(z_0)$ eine Nullfolge. Es gilt also

$$c = \sup_{n \geqslant 0} |a_n (z_0 - a)^n| < \infty.$$

Mit diesem c gilt somit

$$|a_n| \leqslant \frac{c}{|z_0 - a|^n}, \qquad n \geqslant 0.$$

Betrachten wir nun einen beliebigen anderen Punkt z mit $|z-a| \leqslant r < |z_0 - a|$, so ist dort

$$|a_n (z-a)^n| \leqslant |a_n| \, r^n \leqslant \frac{cr^n}{|z_0 - a|^n} = cq^n$$

mit

$$q = \frac{r}{|z_0 - a|} < 1.$$

Somit besitzt die Potenzreihe für alle diese z eine konvergente geometrische Reihe als gemeinsame Majorante, und es ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Dieses Lemma beinhaltet folgende Umkehrung. *Divergiert* die Potenzreihe in einem Punkt z_0, so divergiert sie in jedem Punkt z mit $|z-a| > |z_0 - a|$. Denn konvergierte sie in z, so müsste sie ja aufgrund dieses Lemmas auch in z_0 konvergieren. Aus diesen Überlegungen folgt, dass jede Potenzreihe einen eindeutigen *Konvergenzradius* besitzt.

19 **Konvergenzsatz für Potenzreihen** *Zu jeder Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

existiert ein eindeutiger Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ derart, dass sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$ konvergiert, und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| > R$ divergiert. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Menge

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : \phi(z) \text{ ist konvergent} \}$$

enthält immer den Punkt a, ist also nicht leer. Somit ist

$$R = \sup \{ |z-a| \, : \, z \in K \}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, \infty]$. Für dieses R folgen die Behauptungen mit dem vorangehenden Lemma. Denn ist beispielsweise $|z - a| < R$, so muss es ein $z_0 \in K$ geben mit $|z_0 - a| > |z - a|$. Mit dem vorangehehenden Lemma folgt somit die Kovergenz im Punkt z. ⟫⟫⟫

Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe ϕ gilt damit:

(i) Im Fall $R = 0$ divergiert ϕ für jedes $z \neq a$.
(ii) Im Fall $R = \infty$ konvergiert ϕ für jedes $z \in \mathbb{C}$.
(iii) Im Fall $0 < R < \infty$ konvergiert ϕ in jedem Punkt z mit $|z - a| < R$ und divergiert in jedem Punkt z mit $|z - a| > R$.

Man nennt die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant R\},$$

den *Konvergenzkreis* der Potenzreihe. Über Konvergenz oder Divergenz in Punkten auf dem *Rand* $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$ dieses Konvergenzkreises lässt sich allerdings ohne weitere Annahmen *nichts sagen*. Dort kann das Verhalten sogar außerordentlich ›wild‹ sein.

Es gilt übrigens folgende Formel, die wir allerdings nicht benötigen und deren Beweis wir als Übung überlassen $_{\text{A-18}}$.

20 **Formel von Hadamard** *Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - a)^n$$

gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

mit den Vereinbarungen $1/0 = \infty$ *und* $1/\infty = 0$. ⋊

▷ *Beispiel* Betrachte die Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} z^n.$$

Aufgrund des Wurzelkriteriums konvergiert sie für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$. Ihr Konvergenzradius ist also $R = 1$. Tatsächlich ist dies die geometrische Reihe zum Faktor z. Es ist also

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} z^n = \frac{1}{1 - z}, \qquad |z| < 1,$$

und man spricht von der *Entwicklung* der Funktion $(1 - z)^{-1}$ in ihre Potenzreihe am Punkt $a = 0$.

6.16

Die Funktion $(1-z)^{-1}$ ist allerdings auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ erklärt, und tatsächlich können wir sie auch in jedem anderen Punkt $a \neq 1$ in eine Potenzreihe entwickeln. In diesem Fall ist die Rechnung auch nicht schwer. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-a} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(1-a)^{n-1}} (z-a)^n.\end{aligned}$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius $R = |a-1|$. Größer kann er nicht sein, da die Reihe ja nicht in einem Punkt konvergieren kann, wo die Funktion $(1-z)^{-1}$ nicht erklärt ist. ◂

7

Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man ›in einem Zug und ohne abzusetzen‹ zeichnen kann.

Natürlic 69ies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

Präziser ist schon folgende Vorstellung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε, so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε-δ-Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab.

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst reelle Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei D eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dafür schreiben wir auch kurz

$$f\colon\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}.$$

Typischerweise ist D ein Intervall, aber dies spielt für die folgenden Betrachtungen zunächst keine Rolle.

1 **Definition** *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$t \in D \ \wedge\ |t-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \rtimes \tag{1}$$

Drücken wir dies mit Umgebungen aus, so ist eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \quad \Rightarrow \quad f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \tag{2}$$

oder noch kürzer

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{3}$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε-Streifen $W = U_\varepsilon(f(a))$ um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ-Streifen $V = U_\delta(a)$ um den Urbildpunkt a gib, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist – siehe Abbildung 1.

Man beachte, dass in (1) und (2) nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ-Umgebung von a definiert ist.

▷ *Zwei triviale Beispiele* A. Jede konstante Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$, ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig.

B. Jede lineare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = mt$ ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $\delta = \varepsilon/(1+|m|)$ zu wählen. Ist dann $|t-a| < \delta$, so wird

$$|f(t) - f(a)| = |mt - ma| \leqslant |m|\,|t-a| < |m|\,\delta < \varepsilon. \qquad ◁$$