6

Reihen

Folgen besonderer Art sind unendliche Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

reeller oder komplexer Zahlen, denen wir bereits in einigen Beispielen des Abschnitts 5.4 begegnet sind. Da man nicht sämtliche Glieder einer Folge (a_k) auf einmal summieren kann, steht eine solche Summe genauer für die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \geqslant 1,$$

die man in gewohnter Weise untersuchen kann.

Übrigens kann man jede Zahlenfolge (a_n) auch als Partialsummenfolge der Reihe

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1}).$$

auffassen. Denn es ist

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n.$$

Folgen und Reihen sind somit im Grunde zwei Erscheinungsformen ein und derselben Sache. Die Darstellung als Reihe führt allerdings zu einer Reihe spezieller Konvergenzkriterien.

6.1 Konvergenz

Eine *Zahlenreihe* oder kurz *Reihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$$

mit reellen oder komplexen *Gliedern* $a_1, a_2, \ldots$. Die endlichen Summen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \geqslant 1,$$

heißen die n-ten *Partialsummen* dieser Reihe.

Definition *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Ihr Grenzwert heißt Wert dieser Reihe, es gilt dann*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen dagegen nicht, so heißt die Reihe divergent. ⋊

Die Summation kann natürlich auch bei jedem anderen Index beginnen, nicht nur bei 1. Kommt es auf den Startindex nicht an, schreibt man auch $\sum_k a_k$.

Bemerkung Eigentlich ist zu unterscheiden zwischen der *formalen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

deren Konvergenz noch nicht fest steht und die auch divergieren kann, und der *konvergenten Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die *formale Reihe* steht für die *Folge* ihrer Partialsummen, unabhängig von deren Konvergenz, die *konvergente Reihe* für deren *Grenzwert*, wenn er existiert. Dieser Unterschied kommt in der allgemein üblichen Notation für Reihen nicht zum Ausdruck. ⊸

▹ *Beispiele* Die Partialsummen der *Quadratreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

sind monoton steigend, da alle Summanden positiv sind. Sie sind auch beschränkt, denn

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz $_{5.14}$ konvergieren die Partialsummen, und die betrachtete Reihe ist konvergent. Übrigens wusste bereits Euler, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad ◂$$

1 ▹ Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + ..$$

konvergiert für $|q| < 1$. Denn für die Partialsummen gilt ja $_{3.13}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \qquad q \neq 1.$$

Mit $q^{n+1} \to 0$ $_{5.10}$ für $|q| < 1$ und den Grenzwertgleichungen $_{5.7}$ folgt die Konvergenz der Partialsummen, und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Für $|q| \geqslant 1$ ist die Reihe dagegen offensichtlich divergent. ◂

▪ Zwei elementare Kriterien

2 **Cauchykriterium** *Die Zahlenreihe $\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant N. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = |s_m - s_n|$$

ist dies das Cauchykriterium $_{5.22}$ für die Folge der Partialsummen (s_n). ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine *notwendige* Voraussetzung ist außerdem das

3 **Nullfolgenkriterium** *Ist die Reihe $\sum_k a_k$ konvergent, so bilden ihre Glieder a_k eine Nullfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Konvergiert die Folge der Partialsummen, so folgt für $a_n = s_n - s_{n-1}$ aus den Grenzwertgleichungen ${}_{5.8}$

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Konvergieren die Glieder a_k nicht gegen 0, so kann die Reihe $\sum_k a_k$ also nicht konvergieren. Aber natürlich ist das Nullfolgenkriterium nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie das folgende Beispiel zeigt – das wäre ja auch zu einfach und dieses Kapitel überflüssig.

4 ⊳ Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ..$$

ist divergent, denn die Partialsummen sind monoton steigend, aber es gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Sie bilden somit keine Cauchyfolge. Da die Partialsummen monoton wachsen, konvergiert die harmonische Reihe uneigentlich gegen ∞. ◅

Die Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf dem Weg über die Partialsummen zu entsprechenden Sätzen für Reihen. Sind zum Beispiel $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so ist auch die Reihe $\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent, und es gilt

$$\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_k a_k + \mu \sum_k b_k.$$

Wir führen das nicht weiter aus.

⊳ Für $|q| < 1$ und $n \geqslant 0$ ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}.$$ ◅

6.2 Absolute Konvergenz

In einer endlichen reellen Summe ist es kein Problem, die Reihenfolge der Summanden beliebig zu ändern – die Summe ändert sich dadurch nicht. In einer unendlichen Reihe ist dies aber keineswegs immer so. Dazu bedarf es einer stärkeren Form der Konvergenz.

Definition *Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut konvergent, wenn ihre Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe heißt bedingt konvergent.*

5 **Satz von der absoluten Konvergenz** *Eine Reihe ist absolut konvergent genau dann, wenn ihre Absolutreihe beschränkt ist. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Die Folge der Partialsummen der Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ ist monoton steigend. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz [5.14] konvergiert sie genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall erfüllt sie auch das Cauchykriterium. Wegen

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

erfüllt dann auch die Reihe $\sum_k a_k$ das Cauchykriterium [2], ist also konvergent. Für jede endliche Summe gilt außerdem

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Da die rechte Seite monoton mit n steigt und konvergiert, gilt dann auch

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \qquad n \geqslant 1.$$

Da die Partialsummen auf der linken Seite konvergieren, folgt durch Grenzübergang die allgemeine Dreiecksungleichung.

Die Umkehrung des Satzes gilt *nicht* – sonst wäre der Begriff der absoluten Konvergenz ja auch nicht nötig. Eine Reihe kann also konvergieren, während ihre Absolutreihe divergiert. Das klassische Beispiel hierfür ist die alternierende harmonische Reihe, die wir weiter unten betrachten [16].

Wir beschreiben nun genauer, in welchem Sinn absolut konvergente Reihen in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden können. Eine *Umordnung* einer Reihe $\sum_k a_k$ ist gegeben durch eine *Bijektion*

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

die zugehörige *umgeordnete Reihe* ist $\sum_k a_{\sigma(k)}$. Es treten also genau dieselben Summanden wie in $\sum_k a_k$ auf, nur in anderer Reihenfolge. Interessant ist dies natürlich erst, wenn *unendlich* viele Summanden umgeordnet werden.

6 **Umordnungssatz** *Ist die Reihe $\sum_k a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent, und der Wert der Reihe ändert sich nicht.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion. Da die Reihe $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ absolut konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant N.$$

Dann gilt mit $n = N$ und $m \to \infty$ auch

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leqslant \varepsilon.$$

Die Glieder $a_1, .., a_N$ haben in der umgeordneten Reihe $\sum_{k\geqslant 1} a_{\sigma(k)}$ maximal den Index $M = \max\{\sigma(1), .., \sigma(N)\}$. Für $n \geqslant N$ und $m \geqslant M$ gilt dann

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leqslant \varepsilon, \tag{1}$$

denn in der Differenz heben sich die Glieder $a_1, .., a_N$ auf, während jedes weitere Glied sich entweder ebenfalls aufhebt oder genau einmal stehen bleibt. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir hieraus

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leqslant \varepsilon, \qquad m \geqslant M. \tag{2}$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches M existiert, folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen den Wert der ursprünglichen Reihe. Es gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass auch die umgeordnete Reihe *absolut* konvergiert. Dazu genügt es zu bemerken, dass (1) und (2) mit demselben Argument auch für die Beträge gilt, also

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_{\sigma(k)}| \right| \leqslant \varepsilon, \qquad m \geqslant M.$$

Also ist $\sum_{k\geqslant 1} |a_{\sigma(k)}|$ beschränkt und damit konvergent. ⟫⟫⟫

Dass dieser Satz nicht selbstverständlich ist, demonstriert der komplementäre Satz über bedingt konvergente Reihen.

7 **Riemannscher Umordnungssatz** *Ist eine reelle Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jeder reellen Zahl s eine Umordnung dieser Reihe, die gegen s konvergiert.* ⋊

⟪⟪⟪ *Beweisskizze* Setze

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \qquad a^- = -\min\{a, 0\}.$$

Dann ist $a = a^+ - a^-$ und $|a| = a^+ + a^-$, sowie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^-.$$

Die linke Seite konvergiert für $n \to \infty$ nach Voraussetzung. Würde einer der beiden Reihen auf der rechen Seite konvergieren, dann auch die andere. Konvergieren aber beide, so konvergiert auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^- = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

die Reihe wäre also absolut konvergiert. Da dies nicht der Fall ist, gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty.$$

Sei nun $s > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $s_0^- = 0$ sowie $K_0^+ = K_0^- = 0$ und definieren induktiv

$$s_n^+ = s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K_n^+} a_k^+, \qquad s_n^- = s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^- < k \leqslant K_n^-} a_k^-, \qquad n \geqslant 1,$$

wobei

$$K_n^+ \coloneqq \min\left\{K : s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K} a_k^+ > s\right\},$$
$$K_n^- \coloneqq \min\left\{K : s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K} a_k^- < s\right\}.$$

Da die hier auftretenden Summen für $K \to \infty$ divergieren, sind die betrachteten Mengen nicht leer und K_n^+ und K_n^- wohldefiniert. Aus dieser Konstruktion folgt $s_n^- < s < s_n^+$ für alle n mit

$$s_n^+ - s \leqslant a_{K_n^+}^+, \qquad s - s_n^- \leqslant a_{K_n^-}^-.$$

Wegen $K_n^\pm \to \infty$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ zeigt dies, dass s_n^+ und s_n^- gegen s konvergieren. ⟫⟫

6.3 Konvergenzkriterien

Das einfachste Konvergenzkriterium ergibt sich aus dem Vergleich einer Reihe mit einer konvergenten Majorante. Dabei heißt eine reelle Reihe $\sum_n b_n$ *Majorante* einer Reihe $\sum_n a_n$, wenn

$$|a_n| \leqslant b_n$$

für alle hinreichend großen n gilt.

8 **Majorantenkriterium** *Besitzt eine Reihe eine konvergente Majorante, so ist sie absolut konvergent.* ⋊

⟪⟪ Nach Voraussetzung existiert ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n| \leqslant \sum_{n=N}^{m} b_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} b_n < \infty.$$

Also ist die Absolutreihe $\sum_n |a_n|$ beschränkt, und die Behauptung folgt mit dem Satz von der absoluten Konvergenz 5. ⟫⟫

Es gibt auch ein entsprechendes

9 **Minorantenkriterium** *Besitzt eine Reihe eine divergente Minorante – gilt also $a_n \geqslant b_n \geqslant 0$ für fast alle n und divergiert $\sum_n b_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_n a_n$.* ⋊

⟪⟪ Denn wäre $\sum_n a_n$ konvergent, so wäre nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_n b_n$ konvergent. ⟫⟫

Die Wahl spezieller Majoranten führt zu handlichen Konvergenzkriterien. Besonders einfach und praktisch sind das Wurzel- 10 und das Quotientenkriterium 11, die auf der geometrischen Reihe als Majorante beruhen. Dabei greifen wir auf die Definition der n-ten Wurzel vor, die erst in Abschnitt **??** erfolgt. Die Ergebnisse dort sind aber unabhängig von diesem Kapitel, so dass kein Zirkelschluss vorliegt. — Im Folgenden betrachten wir immer eine Zahlenreihe $\sum_n a_n$.

10 **Wurzelkriterium** *Konvergiert die Folge* $(\sqrt[n]{|a_n|})$ *und gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ *absolut konvergent. Gilt dagegen*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Im ersten Fall existiert ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also gilt $|a_n| \leqslant q^n$ für $n \geqslant N$, und die geometrische Reihe $\sum_n q^n$ bildet eine konvergente Majorante zu $\sum_n a_n$.

Im anderen Fall ist $|a_n| \geqslant 1$ für fast alle n. Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert 3. ⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiele* A. Für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^r z^n = 1 + z + 2^r z^2 + ..$$

erhält man 5.13

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^r |z|^n} = \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big)^r |z| = |z|.$$

Somit konvergiert sie absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und jedes $r \in \mathbb{N}$.

B. Für die Reihe

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^r} = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + ..$$

gilt dagegen 5.13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^r}} = \left(\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}}\right)^r = 1.$$

Somit ist das Wurzelkriterium *nicht* anwendbar. Tatsächlich konvergiert die Reihe für $r > 1$ und divergiert für $r \leqslant 1$ 14. ◃