11. Vorlesung 9. 12. 20

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Umgekehrt: (a_n) gegeben.

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \, , \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ oder } a_k \in \mathbb{C}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{n-te Partialsumme.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Bemerkung: Bezeichnung:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ „formale Reihe“

= Folge der Partialsummen

= (s_n)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim s_n$

Wert der Reihe.

Bsp: 1. Quadratreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

$s_n \nearrow$ Beschränkt ?

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Konvergent !

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(Euler).}$$

Bsp: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

Konvergiert für $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \neq 1$$

$|q| < 1 \implies |q^{n+1}| = |q|^{n+1} \longrightarrow 0$

Also:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \longrightarrow \frac{1}{1-q}.$$

Also: Für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Bem.: Für $|q| \geq 1$ divergent.

Bew:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$m > n$:

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon, \quad \text{für } m > n \geq N(\varepsilon).$$

Bew: Angenommen: $s_n \longrightarrow s$ konvergent.

Bew:

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

GW: $n \to \infty$:

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0. \qquad \blacksquare$$

Bsp: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\longrightarrow \infty, \quad n \to \infty$$

Bew:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n}}_{n \text{ Summanden}} \frac{1}{2n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

S_n ist keine CF!

Grenzwertsätze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{falls}} + \mu \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{konvergent.}}$$

Bsp: Für $|q| < 1$:

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}$$

$k \leftarrow n+k$

$$= q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$= \frac{q^n}{1-q}. \qquad \blacksquare$$

Bsp: Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

ist konvergent

ein viel stärkerer Begriff: Konvergente R.

Beweis: Partialsummen $\to$ Absolutreihe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad \nearrow$$

Konvergent $\Longleftrightarrow$ beschränkt.

Konvergent:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad , \quad m > n \geq N(\varepsilon)$$

Also gilt auch CK für $\sum a_k$, also konvergent.

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \underbrace{\sum_{k=n}^{m} |a_k|}_{m \to \infty} \quad \text{für } m > n$$

Also:

$$\underbrace{\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right|}_{\substack{\text{Limes} \\ m \to \infty}} \leq \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|}_{\text{Reihe}} \quad \text{für alle } m > n$$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| . \qquad \blacksquare$$

Umordnung von Reihen :

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{Bijektion}$$

umgeordnete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Da $\sum a_n$ absolut konv.:

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon, \qquad m > n \geq N(\varepsilon)$$

Mit $n = N$, $m \to \infty$:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon .$$

Betrachte:

$$a_1, \ldots, a_N$$

$$a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}$$

$$M = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\} < \infty$$

Für $n \geq N$ und $m \geq M$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

Heben sich weg.

Konv. für $n \to \infty$

Also für $m \to \infty$: $m \geq M$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)}}_{\text{ist konvergent mit Grenzwert}} \right| \leq \varepsilon ,$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Genauso ist absolute Konvergenz:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_{\sigma(k)}| \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

Gilt auch für

Denn klar: $\sum |a_{\sigma(k)}|$ konvergiert.

Skizze: Für $a \in \mathbb{R}$:

$$a^+ = \max(a,0) = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

$$a^- = -\min(a,0) = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

Dann:

$$a = a^+ - a^- = \begin{cases} a^+, & a \geq 0 \\ -a^-, & a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = a^+ + a^-$$

Bsp.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\text{konvergent}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^+}_{} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^-}_{\text{konv ?}}$$

Wegen "+" statt "−", ist Reihe, also auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^- = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

↯

Caso: Sia $S \geq 0$.

$$a_1^+ + \dots + a_{k_1}^+ \quad > S$$

$$- a_1^- - \dots - a_{k_1}^- \quad < S$$

$$+ a_{k_1+1}^+ \dots + a_{k_2}^+ \quad > S$$

$$< S$$

$$\dots .$$

Da $|a_n| \to 0$, segue che

S_n [illegible] S [illegible].

$\sum b_n$ maggiorante di $\sum a_n$, se

$$|a_n| \leq b_n, \quad n \geq N.$$

Notiamo $b_n \geq 0$.

Nach Vor:

$$\underbrace{\sum_{n=N}^{m} |a_n|}_{\text{beschränkt}} \leq \sum_{n=N}^{m} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} b_n < \infty$$

$\Longrightarrow$ $\sum a_n$ absolut konvergent.

$\sum a_n$, $\quad a_n \geq b_n \geq 0$

& $\underbrace{\sum b_n}_{\text{Minorante}}$ divergent

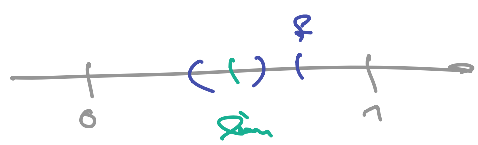
$\Longrightarrow$ $\sum a_n$ divergent.

Απόδειξη:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Διάλεξε q τ.ω.

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1, \qquad n \ge N$$



Άρα

$$|a_n| \le q^n, \qquad n \ge N.$$

$$\underbrace{\sum q^n}_{\text{συγκριτικό κριτήριο}} \text{ συγκλίνει για } |q|<1$$

$\sum a_n$ $\Longleftarrow$ συγκριτικό κριτήριο

απόλυτα συγκλίνει.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

$$\Longrightarrow \quad |a_n| \not\to 0.$$

Bsp: 1. $\quad z \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^r}_{=a_n} z^n = 1 + z + 2^r z^2 + \dots$$

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{n^r |z|^n} = \sqrt[n]{n^r} \cdot |z| = \left(\sqrt[n]{n}\right)^r |z| \longrightarrow |z| \overset{!}{<} 1$$

Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe absolut,

Für $|z| > 1$ divergent.

2.

$r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^r} = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^r}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^r}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^r}$$

$$\longrightarrow 1, \quad \cancel{r \in \mathbb{N}} \quad r > 0$$

Wurzelkrit. gibt keine Entsch.

$r \leq 1$ Harmonische Reihe $\longrightarrow$ Div

$r \geq 2$ Quadratische $\longrightarrow$ Konv.

Sogar $r > 1$

Beweis:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$