10. Vorlesung 4.12.20

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Skalarprodukt:

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$$

$$\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \mu \langle x, z\rangle$$

$$\langle x, 0\rangle = 0$$

Bsp: $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$ Standard Sk.pr.

Beweis: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2 \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\neq 0}$$

Falls $\langle y,y\rangle = 0$, also $y=0$.

OBdA $\langle y,y\rangle \neq 0$:

$$\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$$

Also:

$$0 \leq \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}. \quad \Big| \cdot \langle y,y\rangle > 0$$

Also:

$$\boxed{0 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2.}$$ ✓

Gleichheit: Angenommen: "="

Fall $y=0$ ✓

Fall $y \neq 0$: dieselbe Rechnung "rückwärts":

$$0 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

Also: $x+\lambda y = 0$. □

Satz: $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Skalarprodukt auf E, dann

$$\|x\| := \underbrace{\sqrt{\langle x,x\rangle}}_{\geq 0}$$

Norm.

Beweis: Definitheit. ✓

Homogenität:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle}$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\, \|x\|. \ ✓$$

Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| .$$

Dreiecksungl.:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \ ✓$$

Bsp.: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$

induziert durch Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, .$$

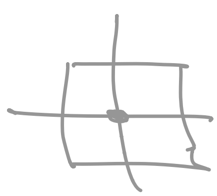
Bem.: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$

$a \in E$, $\varepsilon > 0$

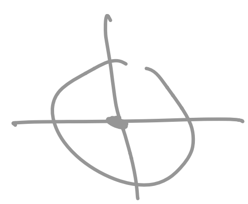
$$U_\varepsilon(a) := \{ x \in E : \|x-a\| < \varepsilon \}$$

offene ε-Kugeln

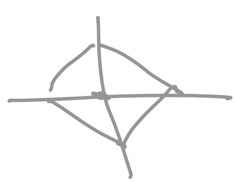
$\|\cdot\|_\infty$:



$\|\cdot\|_2$:

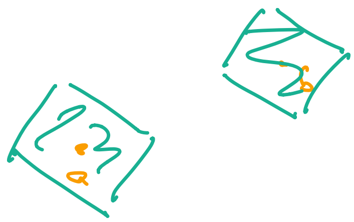


$\|\cdot\|_1$:



$a \neq b$ in E: Dann ex. $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$



Beweis:

Wähle z.B. $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\|a-b\|$. (ü)

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $N \geq 1$:

$$a_n \in U_\varepsilon(a), \quad n \geq N$$

$$\Leftrightarrow \quad \|a_n - a\| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Beweis: Sei $b \neq a$, $a = \lim a_n$.

Dann ex. $\varepsilon > 0$:

$$\underbrace{U_\varepsilon(b)}_{\text{nur endlich viele}} \cap \underbrace{U_\varepsilon(a)}_{\text{fast alle}} = \emptyset.$$

Also kann b nicht Grenzwert sein. ∎

Beweis:

$$x_n \in \overbrace{U_\varepsilon(x)}^{\text{in } E} \iff \|x_n - x\| < \varepsilon$$

$$\iff \|x_n - x\| \in \underbrace{U_\varepsilon(0)}_{\text{in } \mathbb{R}}$$

$\square$

Beweis:

$$\underbrace{\big|\|x_n\| - \|x\|\big|}_{\to 0} \le \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

Beweis: $\|x\| = \lim \|x_n\|$, $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$

$$\|(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x + \mu y)\|$$

$$= \|\lambda(x_n - x) + \mu(y_n - y)\|$$

$$\le \underbrace{|\lambda| \cdot \underbrace{\|x_n - x\|}_{<\varepsilon} + |\mu| \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{<\varepsilon}}_{<\varepsilon}.$$

Also:

$$\lambda x_n + \mu y_n \longrightarrow \lambda x + \mu y. \qquad \square$$

Folge in $\mathbb{R}^m$:

$(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n \in \mathbb{R}^m$

$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$

Grenzwert $a \in \mathbb{R}^m$:

$a = (a_1, \dots, a_m)$.

$x_{n,i} \longrightarrow a_{n,i}$ für jedes i mit $1 \leq i \leq m$

$\Longleftrightarrow$ $x_n \to a$ in $\mathbb{R}^m$

bzgl. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\cdot\ \|\cdot\|_\infty$

Beweis des Lemmas:

$$\|x\|_\infty^2 = \left(\max_{1\le i\le n} |x_i|\right)^2$$

$$\le |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$$

$$\le \left(\underbrace{|x_1|} + \dots + \underbrace{|x_n|}\right)^2$$

$$\le \left(n \max_{1\le i\le n} |x_i|\right)^2$$

Also:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty . \quad \blacksquare$$

Beweis des Satzes: (x_n), $x_n \to x$?

$$\|x_n - x\|_\infty \le \|x_n - x\|_2 \le \|x_n - x\|_1 \le n \cdot \|x_n - x\|_\infty$$

Laut einem Satz aus AF, gilt dass

$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff$ jede Komponente konvergiert.

$\blacksquare$

Beweis: Sei $(x_n)_n$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}^m$.

Sei
$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$$

Dann sind

$(x_{n,i})_n$ für alle $1 \le i \le m$

beschränkt in $\mathbb{R}$.

$i=1$: $(x_{n,1})_n$ hat konv. Teilfolge:

$n_k^{(1)}$:

$$x_{n_k^{(1)},1} \longrightarrow a_1 .$$

$i=2$: Betrachte $(x_{n_k^{(1)},2})$: $n_k^{(2)}$

$$x_{n_k^{(2)}} \longrightarrow a_2 .$$

$\vdots$

Am Ende: $n_k^{(m)}$:

$$x_{n_k^{(m)},m} \longrightarrow a_m .$$

Also:
$$x_{n_k^{(m)},i} \longrightarrow a_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Also:
$$x_{n_k^{(m)}} \longrightarrow a = (a_1, \dots, a_m) . \quad \square$$