2

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der gesamten Analysis. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst Klarheit über dieses Fundament zu verschaffen.

Der *konstruktive* – und historisch korrekte – Zugang beginnt bei den natürlichen Zahlen und führt über die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Jedes Mal ist ein neues Zahlensystem auf dem vorangehenden aufzubauen, und es sind die gewünschten Eigenschaften nachzuweisen. Man erhält so ein tief gegründetes Fundament, doch ist die sorgfältige Ausführung langwierig, um nicht zu sagen langweilig. Auch trägt es unmittelbar wenig zum Verständnis der *eigentlichen* Analysis bei.

Der *axiomatische* – und hier beschriebene – Zugang zu den reellen Zahlen ist direkter. Er besteht darin, möglichst wenige Postulate – die sogenannten *Axiome* – zu formulieren, die den Ausgangspunkt für alle weiteren Schlüsse bilden. Diese Axiome werden nicht weiter hinterfragt. Sie mögen evident sein, wenn man sie auf eine bestimmte Vorstellung von den reellen Zahlen bezieht. Doch mathematisch gesehen ist dies unerheblich. Diese Axiome machen keine Aussage, was die reellen Zahlen *sind*. Sie legen nur fest, welche *Eigenschaften* sie haben. Und nur diese Eigenschaften sind für alles Folgende relevant. — Ziel dieses Kapitels ist die folgende

Charakterisierung der reellen Zahlen *Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen angeordneten Körper, der mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird.* $\rtimes$

Im Einzelnen geht es um folgende Eigenschaften:

(i) Die reellen Zahlen bilden einen *Körper*.

(ii) Dieser Körper besitzt eine *Ordnungsstruktur*.

(iii) Und er ist – in einem noch zu definierenden Sinn – *vollständig*.

Wir brauchen nur eine Bezeichnung für diesen Körper, weil außerdem gilt:

(iv) Es gibt im Wesentlichen nur *einen* Körper mit diesen Eigenschaften.

Darum wird es in den nächsten Abschnitten gehen.

2.1

2.1 Die Körperaxiome

Zunächst einmal bilden die reellen Zahlen einen *Körper*. Das ist eine Menge, in der zwei Operationen erklärt sind, die üblicherweise als Addition und Multiplikation bezeichnet werden und die den folgenden *Körperaxiomen* genügen.

1 **Körperaxiome** *Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, genannt Addition und Multiplikation, heißt Körper, wenn in ihm die folgenden Axiome gelten:*

die Axiome der Addition:

(A-1) *Die Addition ist assoziativ und kommutativ,*

(A-2) *Es gibt ein Element $n \in \mathbb{K}$, genannt neutrales Element der Addition, so dass $x + n = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,*

(A-3) *Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ existiert ein Element $\bar{x} \in \mathbb{K}$, genannt das additiv Inverse zu x, so dass $x + \bar{x} = n$,*

die Axiome der Multiplikation:

(M-1) *Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ,*

(M-2) *Es gibt ein Element $e \in \mathbb{K}$, $e \neq n$, genannt neutrales Element der Multiplikation, so dass $x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,*

(M-3) *Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq n$ existiert ein Element $x' \in \mathbb{K}$, genannt das multiplikativ Inverse zu x, so dass $x \cdot x' = e$,*

und das Distributivgesetz:

(D) *Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt* $\quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$. ⋊

Genauer ist ein Körper ein *Tripel* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ mit den oben genannten Eigenschaften. Ist aber klar, welche Operationen gemeint sind, spricht man einfach vom *Körper* $\mathbb{K}$.

Um Klammern zu sparen, vereinbart man, dass Punktoperationen stärker binden als Strichoperationen. Auch lässt man den Punkt für die Multpiplikation meist weg. Das Distributivgesetz lautet dann beispielsweise $x(y + z) = xy + xz$.

2 ⊳ *Beispiele für Körper* A. Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{n, e\}$ mit den Operationen

$$\begin{array}{c|cc} + & n & e \\ \hline n & n & e \\ e & e & n \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & n & e \\ \hline n & n & n \\ e & n & e \end{array}.$$

B. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper mit neutralen Elementen $n = 0$ und $e = 1$.

C. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bildet ebenfalls einen Körper – siehe Kapitel 4.

D. Eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten ist gegeben durch einen Ausdruck der Gestalt

$$\frac{a_m x^m + .. + a_1 x + a_0}{b_n x^n + .. + b_1 x + b_0}, \qquad m, n \geqslant 0,$$

mit $a_0, .., a_m, b_0, .., b_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \neq 0$. Die Menge $\mathbb{M}$ dieser Funktionen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper.

E. Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \coloneqq \{a \oplus b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

bildet einen Körper mit den Operationen

$$(a \oplus b\sqrt{2}) \boxplus (c \oplus d\sqrt{2}) \coloneqq (a + c) \oplus (b + d)\sqrt{2},$$
$$(a \oplus b\sqrt{2}) \boxdot (c \oplus d\sqrt{2}) \coloneqq (ac + 2bd) \oplus (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Die neutralen Elemente sind $n = 0 \oplus 0\sqrt{2}$ und $e = 1 \oplus 0\sqrt{2}$, und das multiplikativ Inverse eines Elementes ungleich n ist beispielsweise

$$(a \oplus b\sqrt{2})' = \tfrac{a}{a^2 - 2b^2} \oplus \tfrac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Der Nenner verschwindet nicht, da $\sqrt{2}$ nicht rational ist $_{1.7}$. [1] ◁

Zunächst bemerken wir, dass aus den Axiomen *folgt*, dass die neutralen und die inversen Elemente eindeutig sind. Dies muss also nicht explizit gefordert werden.

3 **Lemma** *In einem Körper sind die neutralen und inversen Elemente eindeutig bestimmt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\tilde{n}$ ein weiteres neutrales Element der Addition. Dann gilt (A-2) sowohl für n als auch für $\tilde{n}$. Zusammen mit (A-1) ergibt sich hieraus

$$\tilde{n} = \tilde{n} + n = n + \tilde{n} = n,$$

also $\tilde{n} = n$. Damit ist die Eindeutigkeit des neutralen Elementes gezeigt.

Ist $\tilde{x}$ neben $\bar{x}$ ein weiteres additiv Inverses zu x, so folgt aus $x + \bar{x} = n$ und $x + \tilde{x} = n$ sowie (A-1)

$$\tilde{x} = \tilde{x} + n = \tilde{x} + (x + \bar{x}) = \bar{x} + (x + \tilde{x}) = \bar{x} + n = \bar{x}.$$

Entsprechend argumentiert man für die Multiplikation. ⟩⟩⟩⟩⟩

[1] Wir haben hier also drei verschiedene Additionen: $+$ in $\mathbb{Q}$, $\boxplus$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und $\oplus$ als Notation für die Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Erst in $\mathbb{R}$ sind diese drei Operationen identisch.

Rechenregeln

Wir können nun bereits zwei klassische Gleichungen lösen.

4 **Satz** *In einem Körper* $\mathbb{K}$ *besitzt jede Gleichung*

(i) $a + x = b$ *die eindeutige Lösung* $x = \bar{a} + b$,

(ii) $ax = b$ *mit* $a \neq 0$ *die eindeutige Lösung* $x = a'b$. $\rtimes$

⟪⟪⟪ (i) Wegen

$$a + (\bar{a} + b) = (a + \bar{a}) + b = n + b = b$$

ist $x = \bar{a} + b$ eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Ist $\tilde{x}$ eine weitere Lösung dieser Gleichung, so folgt nach Addition von $\bar{a}$, dass

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = \bar{a} + b.$$

Auf der linken Seite steht aber

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = (\bar{a} + a) + \tilde{x} = n + \tilde{x} = \tilde{x}.$$

Somit ist $\tilde{x} = \bar{a} + b = x$. — Für (ii) argumentiert man analog. ⟫⟫⟫

Außerdem erhalten wir unmittelbar die folgenden elementaren

5 **Rechenregeln** *In einem Körper* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $\bar{\bar{x}} = x$,

(ii) $n \cdot x = n$,

(iii) $\bar{e} \cdot x = \bar{x}$,

(iv) $(x')' = x$ *für* $x \neq n$,

(v) $xy = n \;\Rightarrow\; x = n \vee y = n$. $\rtimes$

⟪⟪⟪ (i) Aus

$$\bar{x} + x = x + \bar{x} = n$$

folgt, dass x das additive Inverse zu $\bar{x}$ ist. Also ist $\bar{\bar{x}} = x$.

(ii) Es ist $n = n + n$, und mit dem Distributivgesetz

$$n \cdot x = (n + n) \cdot x = n \cdot x + n \cdot x.$$

Addition des additiv Inversen von $n \cdot x$ auf beiden Seiten ergibt $n = n \cdot x$.

(iii) Mit (ii) ist

$$n = n \cdot x = (e + \bar{e}) \cdot x = e \cdot x + \bar{e} \cdot x = x + \bar{e} \cdot x.$$

Also ist $\bar{e} \cdot x$ das additiv Inverse zu x, also $\bar{x}$.

(iv) Analog zu (i).

(v) Sei $xy = n$. Ist $x = n$, so sind wir fertig. Ist $x \neq n$, so können wir die Gleichung mit x' multiplizieren, und mit (ii) folgt $y = n \cdot x' = n$. ⟫⟫⟫

Bis hier haben wir sehr abstrakt über Körper gesprochen, um deren elementare Eigenschaften ohne jede vorgefasste Vorstellung von Zahlen und deren Arithmetik aus den Axiomen abzuleiten. Im Folgenden beschäftigen wir uns aber vor allem mit dem Körper der reellen Zahlen. Daher schreiben wir von nun an 0 für das neutrale Element n der Addition, und 1 für das neutrale Element e der Multiplikation. Ferner schreiben wir $-x$ für das additiv Inverse $\bar{x}$ zu x, und x^{-1} oder $1/x$ für sein multiplikativ Inverses x' im Fall $x \neq 0$.

Regel (i) wird somit zu $-(-1) = 1$, umd mit (iii) folgt

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1.$$

Wegen (v) ist ferner ein Produkt nur dann 0, wenn wenigstens ein Faktor 0 ist. Man sagt, ein Körper ist *nullteilerfrei*.

Ferner vereinbart man die Schreibweisen

$$x - y \coloneqq x + (-y) = x + \bar{y},$$

und

$$\frac{x}{y} \coloneqq x/y \coloneqq xy^{-1} = xy'.$$

▷ Daraus ergeben sich beispielsweise die Regeln des Bruchrechnens, wie

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \text{falls} \quad bd \neq 0.$$

Denn aus den Axiomen folgt

$$\begin{aligned}(ab^{-1} + cd^{-1})(bd) &= ab^{-1}bd + cd^{-1}bd \\ &= ab^{-1}bd + cd^{-1}db = ad + bc.\end{aligned}$$

Somit ist $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1}$, und das ist die Behauptung. ◁

2.2 Die Anordnungsaxiome

Reelle Zahlen kann man nicht nur addieren und multiplizieren, man kann sie auch hinsichtlich ihrer Größe vergleichen. Sie bilden eine *total geordnete Menge*. — Die folgende Definition entspricht der Charakterisierung einer totalen Ordnung im Trichotomiesatz $_{1.13}$.

2.5

Definition *Eine total geordnete Menge ist eine Menge M mit einer Relation, üblicherweise mit $<$ bezeichnet, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Trichotomie: Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt genau eine der Aussagen*

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

(ii) *Transitivität: Für $a, b, c \in M$ gilt*

$$a < b \wedge b < c \quad \Rightarrow \quad a < c. \qquad \rtimes$$

Genauer ist eine total geordnete Menge ein *Paar* $(M, <)$, bestehend aus einer Menge M und einer totalen Ordnung $<$ auf ihr. Ist klar, welche Ordnung gemeint sind, spricht man einfach von der *total geordneten Menge* M.

▷ *Beispiele* A. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ mit dem üblichen $<$ sind total geordnet.
B. Die Potenzmenge einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist bezüglich $\subsetneq$ *nicht* total geordnet. ◁

Eine totale Ordnung eines *Körpers* ist allerdings nur interessant, wenn sie sich mit den Körperoperationen verträgt. Dies fordern die folgenden Axiome.

Anordnungsaxiome *Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt angeordnet, wenn er durch eine Relation $<$ total geordnet wird, so dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:*

(O-1) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c$,

(O-2) $0 < a \wedge 0 < b \;\Rightarrow\; 0 < ab$. $\rtimes$

Ein *angeordneter Körper* ist also genauer ein *Quadrupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ aus einem Körper $\mathbb{K}$ mit Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und totaler Ordnung $<$. Sind alle diese Bestandteile aus dem Kontext klar, sprechen wir einfach vom *angeordneten Körper* $\mathbb{K}$.

▷ *Beispiel* A. Der Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}_2$ kann *nicht* angeordnet werden. Denn wäre $0 < 1$, so wäre wegen (O-1) auch

$$1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 0,$$

ein Widerspruch. Dasselbe geschieht mit der Annahme $1 < 0$.
B. Der Körper $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung ist angeordnet.
C. Die komplexen Zahlen werden durch die *lexikographische Ordnung*

$$a + b\mathrm{i} \prec c + d\mathrm{i} \;:\Leftrightarrow\; (a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$$

total geordnet. Diese verträgt sich allerdings *nicht* mit den Körperoperationen. In der Tat kann der Körper $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden. ◁

2.6

Noch etwas Notation und Terminologie. Man definiert

$$a \leqslant b \;:\Leftrightarrow\; a < b \vee a = b$$

sowie $a > b$ und $a \geqslant b$ in offensichtlicher Weise. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *positiv* im Fall $a > 0$, *nichtnegativ* im Fall $a \geqslant 0$, *nichtpositiv* im Fall $a \leqslant 0$, und *negativ* im Fall $a < 0$. Dies dürfte nicht weiter überraschen.

Es folgen einige Rechenregeln für Ungleichungen in angeordneten Körpern, die für die reellen Zahlen ebenfalls wohlvertraut sind.

6 **Rechenregeln** *In einem angeordneten Körper* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0 \;\Leftrightarrow\; -a < -b$,
(ii) $a > b \wedge c > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$,
(iii) $a > b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$,
(iv) $a \neq 0 \;\Rightarrow\; a^2 \coloneqq aa > 0$,
(v) $1 > 0$,
(vi) $a > 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} > 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ (i) Addition von $-b$ mit (O-1) ergibt

$$a > b \;\Rightarrow\; a - b > b - b = 0.$$

Addition von $-a$ mit (O-1) ergibt dann

$$a - b > 0 \;\Rightarrow\; -b > -a.$$

Die umgekehrten Implikationen erhält man analog.

(ii) Mit (i) ist $a - b > 0$. Mit $c > 0$ und (O-2) folgt

$$(a - b)c = ac - bc > 0$$

und damit $ac > bc$.

(iii) Mit $c < 0$ ist $-c > 0$ wegen (i) und somit $-ac > -bc$ mit (ii). Nochmalige Anwendung von (i) liefert die Behauptung.

(iv) Ist $a \neq 0$, so ist entweder $a > 0$ oder $a < 0$. Im ersten Fall folgt

$$a^2 = aa > 0a = 0$$

mit (ii). Dasselbe erhält man im zweiten Fall mit (iii).

(v) Dies folgt aus (iv) mit $a = 1$ und $1 \cdot 1 = 1$.

(vi) Wäre $a > 0$ und $a^{-1} \leqslant 0$, so wäre wegen (ii) auch $aa^{-1} = 1 \leqslant 0$, ein Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩

Man beachte, dass wir $1 > 0$ nicht als Axiom fordern mussten. Dies ist vielmehr bereits eine Folge der Axiome.