1. Vorlesung

4. November

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto c = a + b$$

Assoziativ: $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

$$= (c+b) + a$$

Kommutativ:

$$a + b = b + a$$

(A-2) Neutrales Element: Es gibt $n \in \mathbb{K}$:

$$x + n = x \underline{, \quad x \in \mathbb{K}}$$

(A-3) Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ ex. $\bar{x} \in \mathbb{K}$:

$$x + \bar{x} = n .$$

Gruppe

(M-2) Es gibt neutrales Element $e \in \mathbb{K}$, $\boxed{e \neq n}$

$$x \cdot e = x , \quad x \in \mathbb{K} .$$

(M-3) Zu jedem $x \in \mathbb{K}$, $\boxed{x \neq n}$ ex. multiplikativ Inverse $x' \in \mathbb{K}$:

$$x \cdot x' = e .$$

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Schreibkonventionen: "Punkt vor Strich"

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x(y+z) = xy + xz .$$

Beispiele: 1. $\mathbb{F}_2 = \{u, e\}$

$+$	u	e
u	u	e
e	e	u

$\cdot$	u	e
u	u	u
e	u	e

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ e = 1 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{1+1=0}$$

2. $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \}$

rationale Zahlen

3. $\mathbb{C}$ komplexe Zahlen : $z = x + iy$.

Beweis: Sei $\tilde{n}$ ein weiteres Nl. in K.

Dann gilt

$$\tilde{n} = \underset{\text{neutr. El.}}{\tilde{n} + n} \overset{(A-1)}{=} \underset{\text{neutr. El.}}{n + \tilde{n}} = n$$

Also

$$\tilde{n} = n .$$

Inverses Element: Seien $\bar{x}$, $\tilde{x}$ Inverse El. zu x:

$$x + \bar{x} = n$$

$$x + \tilde{x} = n$$

Dann

$$\tilde{x} = \tilde{x} + (x + \bar{x}) = \bar{x} + (x + \tilde{x})$$

$$= \bar{x} + n$$

$$= \bar{x} .$$

Also $\tilde{x} = \bar{x}$.

Multiplikation genauso. ∎

Beweis: Es gilt für $x = \bar{a} + b$:

$$a + \underbrace{(\bar{a} + b)}_{x} = (a + \bar{a}) + b$$

$$= n + b$$

$$= b. \quad \checkmark$$

Eindeutigkeit: Sei $\tilde{x}$ eine weitere Lösung:

$$a + \tilde{x} = b \quad \Big| \; \bar{a} +$$

Also

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = \boxed{\bar{a} + b} = x$$

$$= (\bar{a} + a) + \tilde{x}$$

$$= n + \tilde{x}$$

$$\boxed{= \tilde{x}}$$

Beweis: (i) $\overline{(\overline{x})} = x$:

$$\underbrace{\overline{x}} + \underbrace{x}_{\uparrow\ \overline{(\overline{x})}} \underset{A\text{-}1}{=} x + \overline{x} \underset{A\text{-}2}{=} n .$$

$$\overline{\overline{x}} = x .$$

(ii) Es ist $n = n + n$, also

$$\underline{n\cdot x} = (\underline{n+n})\cdot x = n\cdot x + \underbrace{n\cdot x} \;\Big|\; + \underbrace{\overline{(n\cdot x)}}$$

Also:

$$n = n\cdot x \quad ✓$$

$\uparrow$ für jeden $x \in K$

(iii) $\overline{e}\cdot x = \overline{x}$:

$$n \underset{(ii)}{=} n\cdot x = (\underline{e+\overline{e}})\cdot x$$

$$= \underbrace{e\cdot x} + \overline{e}\cdot x$$

$$= x + \overline{e}\cdot x$$

Also:

$$\underbrace{x} + \underbrace{\overline{e}\cdot x} = n$$

$$= \overline{x}$$

Also $\overline{e}\cdot x = \overline{x}$.

(v) Sei $xy = u$.

Fall $x = u$, dann fertig.

Fall $x \neq u$: dann ex. x'

$$xy = u \quad \Big| \; x'.$$

Also

$$x'(xy) = x' \cdot u = u \quad \text{(ii)}$$

$$(x'x)y = ey = y$$

Also: $y = u$. ∎

0 für u

1 für e

$-x$ für $\bar{x}$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ für x'

(i) $-(-x) = x$

(iii) $(-1) \cdot x = -x$

Für $x = -1$:

$$\boxed{(-1)\cdot(-1) = -(-1) = 1.}$$

Vereinbarung:

$$x - y := x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} := x y^{-1} = x \cdot \frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

Beispiel: Regel der Bruchrechnung:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}}, \quad bd \neq 0$$

Bew.:

$$
\begin{aligned}
&(ab^{-1} + cd^{-1})(bd) \\
&= ab^{-1}bd + cd^{-1}bd \\
&= a\underbrace{b^{-1}b}_{1}d + c\underbrace{d^{-1}d}_{1}b \\
&= ad + cb \qquad \Big|\ (bd)^{-1} \neq 0
\end{aligned}
$$

Also:

$$\boxed{ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}} \quad \blacksquare$$

(O-1) $a < b \implies a + c < b + c$

für alle $c \in \mathbb{K}$

(O-2)

Beispiel $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$

Gegenbeispiel: $\mathbb{F}_2 = \{n, e\} = \{0, 1\}$

kann nicht angeordnet werden!

Angenommen, es kann angeordnet werden.

z.B. $0 < 1$. Dann (O-1):

$$0 + 1 < 1 + 1$$

Also: $\overset{\parallel}{1} < \overset{\parallel}{0}$ ↯

Oder $1 < 0$. ... Genauso ... ☒

Beispiele: 2. $\mathbb{Q}$ mit üblicher $<$. $\mathbb{C}$

3. $\mathbb{C}$: $a + bi$, $c + di$

„lexikographisch":

$$(a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$$

$$a + bi \prec c + di$$

Im Lexikon: „an" < „ei" < „es".

Notation: Bisher '$<$'. Damit

$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad a < b \ \vee \ a = b$

$a > b \quad :\Longleftrightarrow \quad b < a$

$a \geq b \quad :\Longleftrightarrow \quad b \leq a$.

Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt:

- positiv, falls $a > 0$
- nichtnegativ: $a \geq 0$
- negativ: $a < 0$
- nichtpositiv: $a \leq 0$.

Beweis: (i)

$$a > b \quad \Big| \; +(-b) \qquad (O-1)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{a + (-b)}_{a-b} > \underbrace{b + (-b)}_{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a - b > 0 \quad \Big| \; +(-a)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{(\underline{a} - b) + (\underline{-a})}_{-b} > \underbrace{0 + (-a)}_{-a}$$

$$-b > -a \qquad \square$$

(ii) $a > b \Longrightarrow \underline{a - b > 0}$

und $\underline{c > 0}$ $\quad (O-2)$:

$$(a-b) \cdot c > 0$$

$$ac - bc > 0$$

$$ac > bc. \qquad ✓$$

(iii) [illegible] $c < 0$, $\underset{(i)}{\Longrightarrow}$ $-c > 0$, $\underset{(ii)}{\Longrightarrow}$

$$a \cdot (-c) > b \cdot (-c)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -ac > -bc$$

$$\underset{(i)}{\Longleftrightarrow} \quad bc > ac.$$

(iv) Ist $a \neq 0$, dann $a > 0$ oder $a < 0$.

$a > 0$: mit (ii) $c = a$:

$$a \cdot a = a^2 > 0 \cdot a = 0 \quad ✓$$

$a < 0$: mit (iii) .

(v) Folgt mit (iv) mit $a = 1$:

$$1 = 1^2 = 1 \cdot 1 > 0$$

(vi) Wäre $a > 0$ und $a^{-1} \leq 0$,

so wäre mit (iii)

$$1 = a \cdot (a^{-1}) \leq 0 \cdot (a^{-1}) = 0$$

$$1 \leq 0 \quad ↯ \text{ zu } 1 > 0.$$

■