Votieraufgaben

1 Zeigen Sie, dass in einem Körper immer gilt: $\bar{x}\bar{y} = xy$.

2 Warum hat in einem Körper n kein multiplikativ Inverses?

3 Auf der Menge $\mathbb{F}_3 = \{n, e, s\}$ seien die Operationen $\oplus$ und $\odot$ durch die Tafeln

$\oplus$	n	e	s
n	n	e	s
e	e	s	n
s	s	n	e

$\odot$	n	e	s
n	n	n	n
e	n	e	s
s	n	s	e

definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_3$ damit ein Körper wird.

4 Ist $\mathbb{R}$ mit den beiden Operationen $a \oplus b \coloneqq a + b$ und $a \odot b \coloneqq ab/2$ ein Körper?

Schriftaufgabe

5 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $1 + 1 \eqqcolon \sigma$. Zeigen sie:
a. $0 < 1 < \sigma$.
b. Ist $a < b$, so ist $a < (a + b)/\sigma < b$.

Votieraufgaben

1 Zeigen sie die Eindeutigkeit des Supremums einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

3 Für beliebige Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} -A &:= \{-a : a \in A\}, \\ A + B &:= \{a + b : a \in A,\ b \in B\}. \end{aligned}$$

Sind A und B nichtleer und beschränkt, so gilt

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A, \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B. \end{aligned}$$

Gilt Letzteres auch für die Multiplikation?

4 Für $a, b \geqslant 0$ gilt

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

5 *Cauchyungleichung* Für reelle Zahlen a, b und $\varepsilon > 0$ gilt

$$2|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon.$$

Schriftaufgaben

6 Für reelle Zahlen $a, b \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geqslant 2.$$

Für welche a, b gilt Gleichheit?

7 Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|.$$

Wann gilt Gleichheit?

Votieraufgaben

1 Eine reelle, nicht rationale Zahl wird *irrational* genannt – was nicht mit *unvernünftig* zu übersetzen ist. Zeigen Sie: Sind a, b, c, d rational mit $ad - bc \neq 0$, und ist x irrational mit $cx + d \neq 0$, so ist auch

$$z \coloneqq \frac{ax+b}{cx+d}$$

irrational.

2 Beweisen sie die folgenden Identitäten.

a. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ *b.* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3 Beweisen sie die folgenden Ungleichungen.

a. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \frac{4^n}{n+1}$ *b.* $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3$.

4 *Algebraische Zahlen* Eine reelle Zahl r heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn es also ganze Zahlen $a_0, .., a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass $a_n r^n + .. + a_1 r + a_0 = 0$. Jede rationale Zahl $r = p/q$ ist zum Beispiel algebraisch, denn $qr - p = 0$. Man zeige, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.

5 Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}_n \nsim \mathbb{N}$ für alle $n \geqslant 1$.

Schriftaufgabe

6 Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper, also zum Beispiel $\mathbb{Q}$. Eine Folge $(I_n)_{n\geqslant 1}$ nichtleerer abgeschlossener Intervalle in $\mathbb{K}$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn

(i) $I_n \supset I_{n+1}$ für alle $n \geqslant 1$, und

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein I_n existiert mit $|I_n| < \varepsilon$.

Zeigen Sie: $\mathbb{K}$ ist vollständig genau dann, wenn zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\geqslant 1}$ genau ein $a \in \mathbb{K}$ existiert mit

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots = \{a\}.$$

Votieraufgaben

1 Formulieren sie einen ε-N-Test dafür, dass eine reelle Folge (a_n) *keine* Nullfolge bildet.

2 Zeigen Sie: Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist divergent.

3 Berechnen Sie die Grenzwerte der a_n, falls diese existieren. Mit Begründung natürlich.

a. $a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 - 1}$ *b.* $a_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ *c.* $a_n = \dfrac{1 + 2 + .. + n}{n^2}$

4 Sei (a_n) eine Folge in $(0,\infty)$. Dann gilt $1/a_n \to 0$ genau dann, wenn $a_n \to \infty$.

5 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ wenigstens ein n mit $0 < a_n < \varepsilon$, so ist $\lim a_n = 0$.

Schriftaufgabe

6 Sei

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge, und zu $\varepsilon = 10^{-6}$ ein passendes N für den ε-N-Test.

Votieraufgaben

1 Geben sie Beispiele dafür, dass die Aussagen über uneigentliche Grenzwerte in Satz 27 falsch werden, wenn man die $\succ$-Bedingungen fallen lässt.

2 Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $[0,1]$,

a. die abzählbar unendlich viele Häufungswerte hat?

b. die überabzählbar viele Häufungswerte hat?

c. deren Häufungswerte genau die rationalen Zahlen in $[0,1]$ sind?

d. mit $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon/n$ für alle $m > n \geqslant 1$ und irgendeinem $\varepsilon > 0$?

3 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}). Dann hat (a_n) genau die beiden Häufungswerte $\lim a_{2n}$ und $\lim a_{2n+1}$.

4 Seien a und b beliebige reelle Zahlen und die Folge (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_0 \coloneqq a, \quad a_1 \coloneqq b, \quad a_{n+1} \coloneqq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

Zeigen sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert.

5 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Dann bildet (a_n) eine Cauchyfolge, die gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ konvergiert.

Schriftaufgabe

6 Zeigen Sie für

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \geqslant 1:$$

a. $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton steigend.

b. $(b_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton fallend.

c. Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert.

d. Wie kann man

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \qquad m \in \mathbb{N},$$

durch diesen Grenzwert ausdrücken?

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die Werte der Reihen

a. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^n}$ *b.* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

2 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a. $\sum \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ *b.* $\sum \frac{n!}{n^n}$ *c.* $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

d. $\sum (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *e.* $\sum \frac{(-1)^n}{n\pi-(-1)^n n}$

f. $\sum \frac{n!}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ *g.* $\sum \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

3 Zeigen Sie, dass für die Partialsummen der Reihe $\mathrm{e} = \sum_{k\geqslant 0} 1/k!$ die Fehlerabschätzung

$$|\mathrm{e}-s_n| < \frac{1}{n!\,n}, \qquad n \geqslant 1$$

gilt.

4 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, wobei $0 < q < 1$.

a. $\sum_{n\geqslant 1} q^{\sqrt{n}}$ *b.* $\sum_{n\geqslant 1} q^{\log n}$ *c.* $\sum_{n\geqslant 1} q^{\log^\alpha n}$ *d.* $\sum_{n\geqslant 2} q^{\log\log n}$

Schriftaufgaben

5 Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1 m langen Gummiband mit der konstanten Geschwindigkeit von 5 cm/min vorwärts. Am Ende der ersten und jeder weiteren Minute wird das Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startet?

6 Bestimmen sie die Konvergenzradien der Reihen

a. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$ *b.* $\sum \frac{(7z)^{7n}}{n^7}$ *c.* $\sum q^{\sqrt{n}} z^{n^2}, \quad 0 < q < 1$.

Votieraufgaben

1 Zeigen Sie: Jede Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist in einem isolierten Punkt von D stetig. Dabei heißt ein Punkt $a \in D$ *isolierter Punkt* von D, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(a) \cap D = \{a\}$.

2 Ist die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig? Gilt der Zwischenwertsatz?

3 Sei I ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\,|f(a)|, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Gilt entsprechend auch $|f(x)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|f(a)|$?

4 *a.* Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert ihres Wertebereiches $f(\mathbb{R})$ genau zweimal annimmt?
b. Und genau dreimal?

5 Für die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to [0,1], \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \text{ rational} \\ 1-t, & t \text{ irrational} \end{cases}$$

zeige man:
a. f ist bijektiv.
b. f ist auf keinem nichtentarteten Teilintervall monoton.
c. f ist *nur* im Punkt $1/2$ stetig.

Schriftaufgaben

6 Ist $f\colon E \supset D \to F$ lipschitzstetig, so ist auch

$$[f]_D \coloneqq \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E}$$

eine Lipschitzkonstante. Dies ist auch die bestmögliche.

7 Man beweise das globale Folgenkriterium: *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.*

Votieraufgaben

1 Man bestimme die Grenzwerte

a. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t+1}$ *b.* $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t-1}$ *c.* $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t^2-1}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ *e.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$.

2 Man bestimme die uneigentlichen Grenzwerte

a. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$ *b.* $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$ *d.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$

3 Die beiden Funktionen $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig. Sind sie auf $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ gleich, so sind sie auf ganz $[a,b]$ gleich.

4 Kann das Produkt fg oder die Komposition $f\circ g$ zweier Funktionen in einem Punkt stetig sein, auch wenn beide Funktionen in den entsprechenden Punkten unstetig sind?

5 Zeigen Sie: Zu jeder Tageszeit gibt es antipodale Punkte auf dem Äquator mit derselben Temperatur.

Schriftaufgabe

6 Für eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gelte die Funktionalgleichung

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\qquad u,v\in\mathbb{R}.$$

Man zeige sukzessive:

a. $f(0)=0$.

b. $f(-x)=-f(x)$.

c. $f(x/n)=f(x)/n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

d. $f(rx)=rf(x)$ für alle $r\in\mathbb{Q}$.

e. Ist f stetig in 0, so auch auf ganz $\mathbb{R}$, und mit $a=f(1)$ gilt $f(x)=ax$.

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die Linearisierungen in $a = 0$ der Funktionen f mit Funktionsterm

a. $\sqrt{1+t}$ *b.* $\dfrac{1}{1-t}$ *c.* $(1+t)^n$ *d.* $\sqrt[n]{1+t}$.

2 Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung des Punktes $c \in \mathbb{R}$ erklärt, im Punkt c seien f differenzierbar, g stetig, und $f(c) = 0$. Dann ist auch fg in c differenzierbar.

3 Für $t \geqslant 0$ und $n \geqslant 1$ ist $\sqrt[n]{t} = t^{1/n}$ definiert als die Umkehrfunktion von t^n. Bestimmen sie die Ableitung von $t^{1/n}$ mit Hilfe des Umkehrsatzes.

4 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-t) = f(t)$, *ungerade*, falls $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Ist f differenzierbar und gerade respektive ungerade, so ist f' ungerade respektive gerade.

5 Die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ sei im Punkt 0 differenzierbar, und $(u_n), (v_n)$ seien zwei gegen 0 konvergierende Folgen in $(-1,1)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = f'(0),$$

wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $u_n < 0 < v_n$ für alle n.

(ii) $0 < u_n < v_n$ für alle n und $v_n/(v_n - u_n)$ ist beschränkt.

Schriftaufgabe

6 Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Gibt es eine affine Funktion $\alpha\colon t \mapsto m(t-a) + b$ mit

$$\lim_{t\to a} \frac{|f(t) - \alpha(t)|}{|t-a|} = 0,$$

so ist diese eindeutig bestimmt, und es ist $b = f(a)$ und $m = f'(a)$.

Votieraufgaben

1 Für $f \in C^n(I)$ gilt $\partial^n(tf(t)) = t\partial^n f(t) + n\partial^{n-1} f(t)$.

2 Sind $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $fg = id$, so können nicht beide Funktionen bei 0 verschwinden.

3 Sei $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lediglich beschränkt. Dann ist f mit $f(t) = t^2\varphi(t)$ bei 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

4 *Verallgemeinerter Satz von Rolle* Die Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei $n-1$-mal stetig differenzierbar und auf (a,b) n-mal differenzierbar, wobei $n \geqslant 1$. Besitzt f Nullstellen $a_0 < a_1 < .. < a_n$ in $[a,b]$, so gibt es einen Punkt $c \in (a_0, a_n)$ mit $f^{(n)}(c) = 0$.

5 Sei I ein kompaktes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Gilt für ein Polynom p_n vom Grad n die Abschätzung

$$|f(a+t) - p_n(t)| \leqslant M\,|t|^{n+1}, \qquad a+t \in I,$$

so ist $p_n = T_a^n f$.

6 Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $M_r = \|f^{(r)}\|_{\mathbb{R}} < \infty$ für $r = 0, 1, 2$. Dann gilt

$$M_1^2 \leqslant 4M_0M_2.$$

Hinweis: Man stelle mithilfe der Taylorschen Formel f' durch f und f'' dar.

Schriftaufgabe

7 Gegeben ist

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin 1/t, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

a. Die Funktion f ist überall differenzierbar.
b. Es ist $f'(0) > 0$.
c. In jeder Umgebung von 0 existieren Intervalle, auf denen f streng monoton fällt.
d. Die Funktion ist nicht stetig differenzierbar.

Votieraufgaben

1 Zur Funktion $f:\ t \mapsto \log \dfrac{1+t}{1-t}$ bestimme man $T_0^{2n+1} f$.

2 Die Umkehrfunktion zu $t \mapsto a^t$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, ist der *Logarithmus zur Basis a*, bezeichnet mit $\log_a$. Hierfür gilt

$$\log_a t = \frac{\log t}{\log a} = \log_a \mathrm{e} \cdot \log t.$$

3 Zeigen sie, dass für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to \infty} x^{-\alpha} \log x = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \log x = 0.$$

Zeigen sie damit auch, dass $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$.

4 *a.* Sei $\omega > 0$. Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \psi_0 \ ?$$

b. Zeigen sie, dass der Raum aller Lösungen von $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ einen zweidimensionalen reellen Vektorraum bildet. *c.* Wie sieht dieser Raum für $\omega = 0$ aus?

5 *a.* Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\sin nt| \leqslant n\,|\sin t|$.
b. Es gibt $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so dass $|\sin at| > a\,|\sin t|$.

Schriftaufgabe

6 *a.* Es gilt $\dfrac{t}{1+t} < \log(1+t) < t, \quad t > 0$.

b. Für $a > 0$ folgt hieraus $\exp\left(\dfrac{a}{1+a/n}\right) \leqslant \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \leqslant \exp(a), \quad n \geqslant 1$.

c. Also gilt $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$.

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie *a.* $\sin \mathrm{i}$ *b.* $\cos \mathrm{i}$ *c.* i^{i} *d.* $\sqrt[5]{\mathrm{i}}$

2 Für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

3 Lösen sie das Anfangswertproblem

$$\varphi'' = \varphi, \qquad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0$$

mit einem *Potenzreihenansatz*: Setzen sie den Ansatz $\varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ in die Gleichung ein und bestimmen sie rekursiv seine Koeffizienten.

4 *Additionstheorem für die Tangensfunktion* Es gilt

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

wann immer die Ausdrücke $\tan u$, $\tan v$ und $\tan(u+v)$ erklärt sind.

5 *a.* Für $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ gilt

$$\frac{1}{1-t} \leqslant \mathrm{e}^{2t}.$$

b. Sind $p_1, .., p_m$ alle Primzahlen, die eine der Zahlen $1, 2, .., n$ teilen, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{2}{p_l}\right).$$

c. Schließen sie hieraus, dass die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen divergiert:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$