Ana-1 1

Ws 2020/21 04.11.20

Votieraufgaben

1 Zeigen Sie, dass in einem Körper immer gilt: $\bar{x}\bar{y} = xy$.

▹ *Lösung* Mit den Rechenregeln für Körper gilt

$$\bar{e}\bar{e} = e\bar{\bar{e}} = \bar{\bar{e}} = e$$

und deshalb

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{e}x\,\bar{e}y = \bar{e}\bar{e}\,xy = e\,xy = xy. \quad ◃$$

2 Warum hat in einem Körper n kein multiplikativ Inverses?

▹ *Lösung* Es gilt ja immer $0 \cdot x = 0 \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{K}$. ◃

3 Auf der Menge $\mathbb{F}_3 = \{n, e, s\}$ seien die Operationen $\oplus$ und $\odot$ durch die Tafeln

$$\begin{array}{c|ccc} \oplus & n & e & s \\ \hline n & n & e & s \\ e & e & s & n \\ s & s & n & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \odot & n & e & s \\ \hline n & n & n & n \\ e & n & e & s \\ s & n & s & e \end{array}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_3$ damit ein Körper wird.

▹ *Lösung* Aufgrund der Symmetrie der beiden Tabellen sind $\oplus$ und $\odot$ kommutativ. Ihre neutralen Elemente sind offensichtlich n und e, und die Inversen sind eindeutig

$$\bar{e} = s, \qquad \bar{s} = e, \qquad s' = s.$$

Die Verifikation der Assoziativgesetze reduziert sich auf

$$s \oplus (e \oplus x) = e \oplus (s \oplus x), \qquad x \in \mathbb{F}_3$$

weil für das Produkt alle Möglichkeiten trivial sind. Für das Distributivgesetz bleibt nur der Fall mit s als äußerem Faktor zu verifizieren. Die Tabellen hierfür sind

$$s \odot \left(\begin{array}{c|ccc} \oplus & n & e & s \\ \hline n & n & s & e \\ e & s & e & n \\ s & e & n & s \end{array} \right), \qquad \begin{array}{c|ccc} s\odot & n & s & e \\ \hline n & n & s & e \\ s & s & e & n \\ e & e & n & s \end{array}.$$

Es passt also alles. ◃

4 Ist $\mathbb{R}$ mit den beiden Operationen $a \oplus b \coloneqq a + b$ und $a \odot b \coloneqq ab/2$ ein Körper?

▹ *Lösung* Ja, alle Körperaxiome sind erfüllt, wie zum Beispiel das Distributivgesetz:

$$(a \oplus b) \odot c = (a+b)c/2 = (ac/2 + bc/2) = a \odot c \oplus b \odot c.$$

Der zugehörige Körperisomorphismus ist

$$\Phi : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, \oplus, \odot), \quad \Phi(x) = 2x. \quad ◂$$

Schriftaufgabe

5 Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $1 + 1 =: \sigma$. Zeigen sie:
a. $0 < 1 < \sigma$.
b. Ist $a < b$, so ist $a < (a+b)/\sigma < b$.

▹ *Lösung* *a.* Aus $0 < 1$ folgt mit den Anordnungsaxiomen $0 + 1 < 1 + 1$, also $0 < 1 < \sigma$.
b. Aus $a < b$ folgt mit den Anordnungsaxiomen $a+a < a+b$ und $a+b < b+b$, mit $1 + 1 = \sigma$ also

$$\sigma a < a + b < \sigma b.$$

Da $\sigma > 0$, ist auch $\sigma^{-1} > 0$. Multiplizieren wir also mit σ^{-1}, so folgt

$$a < (a+b)/\sigma < b. \quad ◂$$

Votieraufgaben

1 Zeigen sie die Eindeutigkeit des Supremums einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

▹ *Lösung* Ein Supremum einer Menge ist immer auch eine obere Schranke dieser Menge, und kleiner oder gleich jeder anderen oberen Schranke dieser Menge. Sind also u und v Suprema derselben Menge, so gilt $u \leqslant v$ und $v \leqslant u$. Damit ist $u = v$. ◃

2 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

▹ *Lösung* Es ist ja $|x| \geqslant 0$ und $|x|^2 \geqslant 0$ deshalb

$$0 \leqslant |x|^2 = |x^2| = x^2.$$

Also ist $|x|$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Wurzel von x^2. ◃

3 Für beliebige Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} -A &\coloneqq \{-a : a \in A\}, \\ A + B &\coloneqq \{a + b : a \in A,\ b \in B\}. \end{aligned}$$

Sind A und B nichtleer und beschränkt, so gilt

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A, \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B. \end{aligned}$$

Gilt Letzteres auch für die Multiplikation?

▹ *Lösung* *a.* Es gilt $a \leqslant \sup A$ für jedes $a \in A$ und $b \leqslant \sup B$ für jedes $b \in B$. Also gilt auch

$$a + b \leqslant \sup A + \sup B.$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$, und damit auch für alle $a + b \in A + B$. Also ist $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A + B$, und es folgt

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B. \tag{†}$$

Angenommen, es gilt nun die strikte Ungleichung. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\sup A + \sup B - 2\varepsilon > \sup(A + B).$$

Aufgrund des Approximationssatzes gibt es dann Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit

$$a > \sup A - \varepsilon, \qquad b > \sup B - \varepsilon.$$

Also ist auch

$$a + b > \sup A - \varepsilon + \sup B - \varepsilon = \sup A + \sup B - 2\varepsilon > \sup(A + B),$$

ein Widerspruch. Also gilt in (†) sogar die Gleichheit.
b. Für die Multiplikation gilt dies zum Beispiel, wenn außerdem $A > 0$ und $B > 0$. Der Beweis verläuft analog. — Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch, zum Beispiel für $A = B = \{-1, 0\}$.

4 Für $a, b \geqslant 0$ gilt

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Lösung Da beide Seiten nichtnegativ sind, ist die Behauptung nach Quadrieren äquivalent mit

$$4ab \leqslant (a+b)^2.$$

Das folgt aber aus der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 4ab &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a-b)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

5 *Cauchyungleichung* Für reelle Zahlen a, b und $\varepsilon > 0$ gilt

$$2\,|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon.$$

Lösung Dies folgt aus der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel A-??, wenn man a durch εa^2 und b durch $\varepsilon^{-1} b^2$ ersetzt:

$$\varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon \geqslant 2\sqrt{\varepsilon a^2 \varepsilon^{-1} b^2} = 2\sqrt{a^2 b^2} = 2\,|ab|\,.$$

Schriftaufgaben

6 Für reelle Zahlen $a, b \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geqslant 2.$$

Für welche a, b gilt Gleichheit?

Lösung Es ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a^2+b^2}{ab}\right| \geqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |a^2+b^2| \geqslant 2\,|ab| \\ &\Leftrightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 \geqslant 2\,|ab| \\ &\Leftrightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 - 2\,|ab| \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (|a| - |b|)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig, also gilt auch die erste Ungleichung. Und Gleichheit gilt genau dann, wenn $|a| = |b|$.

7 Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$

Wann gilt Gleichheit?

▹ *Lösung* Aus $2a = (a+b) + (a-b)$ folgt

$$2\,|a| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$

Vertauschen von a und b ergibt dieselbe Ungleichung für $2\,|b|$. Addition und Division mit 2 ergibt

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$

Um Gleichheit zu diskutieren, kann man aufgrund der Symmetrie in a und b annehmen, dass $a \geqslant |b|$. Dies führt zu

$$(a+b) + (a-b) = a + |b|\,,$$

also $a = |b|$. Somit gilt Gleichheit genau dann, wenn $|a| = |b|$. ◃

Votieraufgaben

1 Eine reelle, nicht rationale Zahl wird *irrational* genannt – was nicht mit *unvernünftig* zu übersetzen ist. Zeigen Sie: Sind a, b, c, d rational mit $ad - bc \neq 0$, und ist x irrational mit $cx + d \neq 0$, so ist auch

$$z \coloneqq \frac{ax + b}{cx + d}$$

irrational.

▹ *Lösung* Wegen $ad - bc \neq 0$ ist $a - cz \neq 0$ und damit

$$x = \frac{zd - b}{a - cz}.$$

Wäre also z rational, so wäre auch x rational. ◃

2 Beweisen sie die folgenden Identitäten.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$ *b.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

▹ *Lösung* *a.* IA: Für $n = 1$ ergibt sich $1 = 1$, was offenbar stimmt. IS:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) + (2n + 1).$$

Die Summe auf der rechten Seite ist nach Induktionsvoraussetzung gleich n^2. Also gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Das ist die Behauptung für $n + 1$, und die Induktion ist vollständig.

b. IA: Für $n = 1$ steht links $1^2 = 1$ und rechts $1 \cdot 2 \cdot 3/6 = 1$. Die Aussage ist also offensichtlich richtig. IS: Auf der linken Seite erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^k \\ &= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2 \\ &= (2n^2 + 7n + 6)(n+1)/6.\end{aligned}$$

Dies ist genau die rechte Seite für $n + 1$, denn ersetzen wir n durch $n + 1$, so erhalten wir

$$(n+1)(n+2)(2n+3)/6 = (2n^2 + 7n + 6)(n+1)/6.$$

Damit ist die Induktion vollständig.

c. IA: Für $n = 1$ ist dies korrekt. IS: Es ist dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Das ist genau die Behauptung für $n+1$. ◂

3 Beweisen sie die folgenden Ungleichungen.

a. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \dfrac{4^n}{n+1}$ *b.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^{n} k^3.$

▹ *Lösung* *a.* IA: Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf $2! \geqslant 4/2$, ist also richtig. IS: Gilt die Ungleichung für irgendein $n \geqslant 1$, so folgt mit $2n+2 \geqslant 4$ auch

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!}\,\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \geqslant \frac{4^n}{n+1}\cdot 4 \geqslant \frac{4^{n+1}}{n+2}.$$

Das ist die Behauptung für $n+1$.
b. IA: Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf $0 < 1/4 < 1$, ist also korrekt. IS: Gilt die Ungleichung für irgendein $n \geqslant 1$, so gilt sie auch für $n+1$, wenn

$$\frac{n^4}{4} + n^3 < \frac{(n+1)^4}{4} < \frac{n^4}{4} + (n+1)^3$$

oder

$$n^4 + 4n^3 < (n+1)^4 < n^4 + 4(n+1)^3.$$

Dies ist korrekt wegen

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \\ (n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.\end{aligned}$$

4 *Algebraische Zahlen* Eine reelle Zahl r heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn es also ganze Zahlen $a_0, .., a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass $a_n r^n + .. + a_1 r + a_0 = 0$. Jede rationale Zahl $r = p/q$ ist zum Beispiel algebraisch, denn $qr - p = 0$. Man zeige, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.

▹ *Lösung* Die Menge $\mathbb{P}_n$ aller Polynome vom Grad $n-1$ mit ganzzahligen Koeffizienten können wir mit einer Teilmenge von $\mathbb{Z}^n$ identifizieren und ist damit abzählbar. Dann ist auch die Menge $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{P}_n$ aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten abzählbar, denn die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar. Da jedes dieser Polynome nur endlich viele Nullstellen hat, ist damit auch die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar. ◅

5 Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}_n \nsim \mathbb{N}$ für alle $n \geqslant 1$.

▻ *Lösung* Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ mit $M \sim \mathbb{A}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Wäre also $\mathbb{N} \sim \mathbb{A}_n$ für ein n, so wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, ein Widerspruch. ◅

Schriftaufgabe

6 Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch angeordneter Körper, also zum Beispiel $\mathbb{Q}$. Eine Folge $(I_n)_{n\geqslant 1}$ nichtleerer abgeschlossener Intervalle in $\mathbb{K}$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn

(i) $I_n \supset I_{n+1}$ für alle $n \geqslant 1$, und
(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein I_n existiert mit $|I_n| < \varepsilon$.

Zeigen Sie: $\mathbb{K}$ ist vollständig genau dann, wenn zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\geqslant 1}$ genau ein $a \in \mathbb{K}$ existiert mit

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots = \{a\}.$$

▻ *Lösung* Schreiben wir $I_n = [a_n, b_n]$, so gilt

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant .. \leqslant a_n \leqslant .. \leqslant b_n \leqslant .. \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

und damit $A \coloneqq \{a_n : n \geqslant 1\} \leqslant \{b_n : n \geqslant 1\} \eqqcolon B$.

⇒ Ist $\mathbb{K}$ vollständig, so existieren

$$a \coloneqq \sup A \leqslant b \coloneqq \inf B,$$

und es gilt

$$b - a \leqslant \inf_n (b_n - a_n) = \inf_n |I_n| = 0.$$

Also ist $a = b$, und $\bigcap_{n\geqslant 1} I_n$ besteht aus genau einem Punkt.

⇐ *Beweisskizze:* Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Angenommen, wir haben für $n \geqslant 0$ ein Intervall

$$I_n = [a_n, b_n], \qquad a_n \in A \leqslant b_n.$$

Für $n = 0$ finden wir ein solches a_0 und b_0. Für $n \geqslant 0$ setze dann

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ist m_n eine obere Schranke von A, so setzen wir

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n].$$

Ist m_n keine obere Schranke von A, so gibt es ein $\alpha_n \in A$ mit $m_n \leqslant \alpha_n$, und wir setzen

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [\alpha_n, b_n].$$

In jedem Fall gilt also

$$I_{n+1} \subset I_n, \qquad |I_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} |I_n|.$$

Wir erhalten also eine Intervallschachtel, welche genau einen inneren Punkt a besitzt. Dieser ist das Supremum von A. ◂

Votieraufgaben

1 Formulieren sie einen ε-N-Test dafür, dass eine reelle Folge (a_n) *keine* Nullfolge bildet.

▷ *Lösung* Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $N \geqslant 1$ ein $n \geqslant N$ existiert, für das $|a_n| \geqslant \varepsilon$. ◁

2 Zeigen Sie: Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist divergent.

▷ *Lösung* Hätte eine solche Abzählung einen Grenzwert $a \in [0,1]$, so lägen zum Beispiel in der Umgebung $U_{1/4}(a)$ fast alle Folgenglieder. Für deren nichtleeres Komplement in $[0,1]$ blieben dann nur endlich viele rationale Zahlen übrig, was offensichtlich Unsinn ist. ◁

3 Berechnen Sie die Grenzwerte der a_n, falls diese existieren. Mit Begründung natürlich.

a. $a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 - 1}$ *b.* $a_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ *c.* $a_n = \dfrac{1 + 2 + .. + n}{n^2}$

▷ *Lösung* *a.* 1 *b.* -1 *c.* $1/2$ ◁

4 Sei (a_n) eine Folge in $(0, \infty)$. Dann gilt $1/a_n \to 0$ genau dann, wenn $a_n \to \infty$.

▷ *Lösung* Da die Folge aus positiven Gliedern besteht, gilt

$$\begin{aligned} 1/a_n \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < 1/a_n < \varepsilon, \qquad N \geqslant N(\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad a_n > 1/\varepsilon, \qquad N \geqslant N(\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad a_n \to \infty. \end{aligned}$$

5 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ wenigstens ein n mit $0 < a_n < \varepsilon$, so ist $\lim a_n = 0$.

▷ *Lösung* Aus der Annahme folgt, dass es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen 0 konvergiert. Da die gesamte Folge ebenfalls konvergiert, muss sie auch insgesamt gegen 0 konvergieren $_{5.21}$. ◁

Schriftaufgabe

6 Sei

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge, und zu $\varepsilon = 10^{-6}$ ein passendes N für den ε-N-Test.

▹▸ *Lösung* Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Für $|a_n| < \varepsilon$ genügt grob

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

also $n > 2/\varepsilon$. ◂◃

Votieraufgaben

1 Geben sie Beispiele dafür, dass die Aussagen über uneigentliche Grenzwerte in Satz 27 falsch werden, wenn man die $\succ$-Bedingungen fallen lässt.

▷ *Lösung* Das ist einfach. ◁

2 Gibt es eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $[0,1]$,
a. die abzählbar unendlich viele Häufungswerte hat?
b. die überabzählbar viele Häufungswerte hat?
c. deren Häufungswerte genau die rationalen Zahlen in $[0,1]$ sind?
d. mit $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon/n$ für alle $m > n \geqslant 1$ und irgendeinem $\varepsilon > 0$?

▷ *Lösung* *a.* Sicher, zum Beispiel hat

$$0,\ 0,1,\ 0,1,2,\ 0,1,2,3,\ 0,1,2,3,4,\ 0,..$$

die natürlichen Zahlen als Häufungswerte.
b. Ja. Jede Abzählung von $\mathbb{Q}$ ergibt zum Beispiel eine Folge, die $\mathbb{R}$ als Menge ihrer Häufungswerte hat.
c. Nein. Denn besitzen die Häufungswerte einer Folge ihrerseits einen Häufungswert, so ist dieser auch Häufungswert der Folge selbst. Sind also bereits alle rationalen Zahlen Häufungswerte, dann, siehe oben, auch alle reellen Zahlen.
d. Nein. Dasselbe Argument wie zuvor.
e. Nein. Betrachten wir die offenen Intervalle

$$I_n = B_{\varepsilon/n}(x_n), \qquad n \geqslant 1,$$

so bedeutet die Bedingung, dass die Mittelpunkte aller auf I_n folgenden Intervalle *nicht* in I_n liegen. Das bedeutet aber, dass die *halb* so großen Intervalle

$$J_n = B_{\varepsilon/2n}(x_n) \subset I_n, \qquad n \geqslant 1$$

sämtlich *disjunkt* sind. Berücksichtigen wir noch, dass bei zwei Intervallen maximal die Hälfte über $(0,1)$ hinausragen kann, so können wir schließen, dass mit jedem Folgenglied x_n ein Intervall der Länge $\varepsilon/4n$ in $(0,1)$ ›blockiert‹ wird: dort können sich keine weiteren Folgenglieder aufhalten. Es gibt aber zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{4n} > 1.$$

Es gibt somit in $(0,1)$ nicht genügend Platz für eine solche Folge. ◁

3 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}). Dann hat (a_n) genau die beiden Häufungswerte $\lim a_{2n}$ und $\lim a_{2n+1}$.

▷ *Lösung* Sei $a' = \lim a_{2n+1}$ und $a'' = \lim a_{2n}$ und . Da beide Teilfolgen zusammen alle Glieder von (a_n) enthalten, liegen fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a') \cup U_\varepsilon(a'')$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$. Dann besitzt aber jede andere reelle Zahl a eine Umgebung $U_\sigma(a)$, in der höchstens endlich viele Folgenglieder liegen. Dies gilt zum Beispiel mit

$$\varepsilon = \sigma = \min(|a - a'|, |a - a''|)/2.$$

Also gibt es keine weiteren Häufungswerte. ◁

4 Seien a und b beliebige reelle Zahlen und die Folge (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_0 \coloneqq a, \quad a_1 \coloneqq b, \quad a_{n+1} \coloneqq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

Zeigen sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert.

▷ *Lösung* Subtraktion von a_n von der Rekursionsformel ergibt

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}), \qquad n \geqslant 1.$$

Daraus folgt mit Induktion und $q = -1/2$

$$a_{n+1} - a_n = q^n(a_1 - a_0) = q^n(b - a), \qquad n \geqslant 1.$$

Somit bildet (a_n) eine Cauchyfolge. Addition der ersten n Terme ergibt dann mit der geometrischen Summenformel

$$a_{n+1} - a = \sum_{k=0}^{n} q^k(b - a) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}(b - a).$$

Im Limes erhält man

$$a_n \to a + \frac{b - a}{1 - q} = (a + 2b)/3. \quad ◁$$

5 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Dann bildet (a_n) eine Cauchyfolge, die gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ konvergiert.

▷ *Lösung* Offensichtlich gilt $a_n \leqslant 1$ und damit auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \geqslant \frac{1}{2}$$

für alle n. Daraus folgt

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})} \right| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|, \qquad n \geqslant 2.$$

Wie zuvor A-5.23 ist also (a_n) eine Cauchyfolge mit Grenzwert $a \in [1/2, 1]$. Grenzübergang in der Rekursionsgleichung ergibt

$$a = \frac{1}{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + a = 1.$$ ◂

Schriftaufgabe

6 Zeigen Sie für

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \geqslant 1:$$

a. $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist monoton steigend.
b. $(b_n)_{n \geqslant 1}$ ist monoton fallend.
c. Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert.
d. Wie kann man

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \qquad m \in \mathbb{N},$$

durch diesen Grenzwert ausdrücken?

▹ *Lösung* Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 = \left\{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 = a^2$$

auf Grund des Grenzwertsatzes für Produkte. Also $b = a^2$. Ferner ist

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n-1}},$$

und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{a}$$

ebenfalls auf Grund der Grenzwertsätze. Also ist $c = a^{-1}$. ◂

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die Werte der Reihen

a. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$ *b.* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2-1}$.

▹ *Lösung* *a.* Dies ist die geometrische Reihe mit $q=-1/2$. Also ist ihr Wert $1/(1-q)=2/3$.

b. Wegen

$$\frac{2}{4n^2-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

heben sich in den Partialsummen alle mittleren Terme auf, und man erhält

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2},\qquad n\to\infty.$$ ◃

2 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a. $\sum\frac{n+4}{n^2-3n+1}$ *b.* $\sum\frac{n!}{n^n}$ *c.* $\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

d. $\sum(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ *e.* $\sum\frac{(-1)^n}{n\pi-(-1)^n n}$

f. $\sum\frac{n!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ *g.* $\sum\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

▹ *Lösung* *a.* Divergent, denn für $n\geqslant 1$ gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1}\geqslant\frac{n}{n^2-3n+1}\geqslant\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

b. Konvergent, mit Quotientenkriterium:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{2},$$

denn $(1+1/n)^n\geqslant 2$ aufgrund der Bernoullischen Ungleichung $_{3.4}$.

c. Divergent, denn

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\geqslant\frac{1}{2n+1}\geqslant\frac{1}{3n}.$$

d. Konvergent, mit Leibniz-Kriterium: Es handelt sich um eine alternierende Reihe, deren Absolutglieder monoton gegen 0 streben:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\searrow 0.$$

e. Divergent, denn für große n ist

$$\begin{aligned}a_{2n}+a_{2n-1}&=\frac{1}{2n(\pi-1)}-\frac{1}{(2n-1)(\pi+1)}\\&=\frac{4n-\pi-1}{2n(2n-1)(\pi^2-1)}\geqslant\frac{cn}{n^2}=\frac{c}{n}.\end{aligned}$$

f. Konvergent. Denn

$$\frac{n!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

g. Konvergent. Denn aufgrund der Bernoullischen Ungleichung ist

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \leqslant \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$$

und deshalb

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}, \qquad n \geqslant 1.$$

Die Konvergenz folgt hieraus mit dem Verdichtungskriterium. ◂

3 Zeigen Sie, dass für die Partialsummen der Reihe $\mathrm{e} = \sum_{k\geqslant 0} 1/k!$ die Fehlerabschätzung

$$|\mathrm{e} - s_n| < \frac{1}{n!\,n}, \qquad n \geqslant 1$$

gilt.

▹ *Lösung* Es ist

$$0 < \mathrm{e} - s_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} < \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^\nu}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-1/(n+1)} = \frac{1}{n!\,n}.$$

4 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, wobei $0 < q < 1$.

a. $\sum_{n\geqslant 1} q^{\sqrt{n}}$ *b.* $\sum_{n\geqslant 1} q^{\log n}$ *c.* $\sum_{n\geqslant 1} q^{\log^\alpha n}$ *d.* $\sum_{n\geqslant 2} q^{\log\log n}$

▹ *Lösung* Da die Reihenglieder monoton fallend gegen Null konvergieren, kann in allen Fällen das Verdichtungskriterium $_{6.13}$ angewendet werden und führt in den ersten beiden Fällen zusammen mit dem Wurzelkriterium zu folgenden Bedingungen an q.

a. $2q^{\sqrt{2}} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad q < 2^{-\sqrt{2}/2}$ *b.* $2q^{\log 2} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad q < \mathrm{e}^{-1}$.

Die anderen beiden Reihen sind mit derselben Argumentation divergent. ◂

Schriftaufgaben

5 Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1 m langen Gummiband mit der konstanten Geschwindigkeit von 5 cm/min vorwärts. Am Ende der ersten und jeder weiteren Minute wird das Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startet?

▹ *Lösung* Sei $\varepsilon > 0$ die Geschwindigkeit der Schnecke. Pro Minute legt sie den Anteil ε / l der jeweiligen Gesamtlänge l des Bandes in dieser Minute zurück. Mit $l = 1, 2, .., n$ hat sie also nach n Minuten den Anteil

$$\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + .. + \frac{1}{n}\right) = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =: \varepsilon s_n$$

zurückgelegt. Da die harmonische Reihe divergiert, gibt es ein erstes n mit $\varepsilon s_n > 1$. In dieser Minute erreicht die Schnecke somit das andere Ende des Bandes. – Man sieht, es kommt nur darauf an, dass man sich überhaupt bewegt ... ◃

6 Bestimmen sie die Konvergenzradien der Reihen

a. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$ *b.* $\sum \frac{(7z)^{7n}}{n^7}$ *c.* $\sum q^{\sqrt{n}} z^{n^2}$, $0 < q < 1$.

▹ *Lösung* *a.* Konvergent für $|z| < \mathrm{e}$, mit Quotientenkriterium:

$$\frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\,|z|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} |z| \to \frac{|z|}{\mathrm{e}}.$$

Den Grenzwert der letzten Folge hatten wir allerdings nicht behandelt ;-<.
b. Für $|7z|^7 \leqslant 1$, also $|z| \leqslant 1/7$. Denn dann gilt

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{|7z|^{7n}}{n^7} \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^7} < \infty.$$

Für $|z| > 1/7$ ist die Reihe divergent, da keine Nullfolge vorliegt.
c. Konvergent für alle z, denn

$$\sqrt[n]{|q^{n^2} z^n|} = |z|\, q^n \to 0.$$ ◃

Votieraufgaben

1 Zeigen Sie: Jede Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist in einem isolierten Punkt von D stetig. Dabei heißt ein Punkt $a \in D$ *isolierter Punkt* von D, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(a) \cap D = \{a\}$.

▹ *Lösung* Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ einfach so, dass $U_\delta(a) \cap D = \{a\}$. Dann ist die ε-δ-Bedingung automatisch erfüllt. ◃

2 Ist die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig? Gilt der Zwischenwertsatz?

▹ *Lösung* Die Funktion ist stetig. Denn für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\varepsilon = \left|a - \sqrt{2}\right| > 0.$$

Auf $U_\varepsilon(a)$ ist dann f entweder konstant 0 oder 1. Der Zwischenwertsatz gilt dagegen nicht, da kein Wert zwischen 0 und 1 angenommen wird. ◃

3 Sei I ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\,|f(a)|, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Gilt entsprechend auch $|f(x)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|f(a)|$?

▹ *Lösung* Falls $f(a) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $f(a) \neq 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset I$ und

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon\,|f(a)|, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Andererseits ist

$$|f(a)| - |f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)|.$$

Kombination beider Ungleichungen und Umformen ergibt die Behauptung. ◃

4 *a.* Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden Wert ihres Wertebereiches $f(\mathbb{R})$ genau zweimal annimmt?
b. Und genau dreimal?

▹ *Lösung* Angenommen, es gibt solch eine Funktion f. Dann gibt es auch eine solche Funktion f mit genau zwei *Nullstellen* $a < b$, die zwischen diesen *positiv* ist, da es keine weiteren Nullstellen geben kann.
Auf $[a,b]$ nimmt f sein Maximum $M > 0$ an wenigstens einer Stelle $c_1 \in (a,b)$ an. Nach Voraussetzung gibt es noch genau eine weitere Stelle c_2 mit

$f(c_2) = M$. Diese muss ebenfalls in (a,b) liegen, denn sonst gäbe es nach dem Zwischenwertsatz mindestens drei Stellen, wo der Wert $M/2$ angenommen wird.
Zwischen c_1 und c_2 nimmt f aber auch ein Minimum $m > 0$ an einer Stelle c_3 an. Dann ist aber aufgrund des Zwischenwertsatzes klar, dass der Wert $(M+m)/2$ innerhalb von (a,b) sogar viermal angenommen werden muss. Wir erhalten also einen Widerspruch. ◂

5 Für die Funktion

$$f: \ [0,1] \to [0,1], \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \text{ rational} \\ 1-t, & t \text{ irrational} \end{cases}$$

zeige man:
a. f ist bijektiv.
b. f ist auf keinem nichtentarteten Teilintervall monoton.
c. f ist *nur* im Punkt $1/2$ stetig.

▹ *Lösung* *a.* Die Funktion f bildet sowohl die rationalen wie auch die irrationalen Zahlen in $[0,1]$ jeweils auf sich ab. Auf beiden Teilmengen ist f streng monoton. Also ist f bijektiv.
b. Jedes nichtartete Teilintervall enthält mindestens zwei rationale und zwei irrationale Punkte. Auf ersteren ist f streng monoton steigend, auf letzteren streng monoton fallend. Insgesamt ist f somit nicht monoton.
c. Sei $m = 1/2$ und $\varepsilon > 0$. Für $|t-m| < \varepsilon$ ist dann auch $|(1-t)-m| = |m-t| < \varepsilon$. Also gilt

$$|f(t)-m| < \varepsilon, \qquad |t-m| < \varepsilon.$$

Also ist f im Punkt m stetig. ◂

Schriftaufgaben

6 Ist $f: E \supset D \to F$ lipschitzstetig, so ist auch

$$[f]_D := \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in D}} \frac{\|f(u)-f(v)\|_F}{\|u-v\|_E}$$

eine Lipschitzkonstante. Dies ist auch die bestmögliche.

▹ *Lösung* Ist f L-lipschitz, so ist für alle $u \neq v$ in D

$$\|f(u)-f(v)\|_F \leqslant L\|u-v\|_E.$$

Also ist auch $[f]_D \leqslant L < \infty$, und *qua definitionem*

$$\|f(u)-f(v)\|_F \leqslant [f]_D \, \|u-v\|_E$$

für alle $u \neq v$ in D. Also ist dies ebenfalls eine Lipschitzkonstante. Eine kleinere Lipschitzkonstante gibt es nicht, da es zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $u \neq v$

gibt mit

$$\|f(u) - f(v)\|_F > ([f]_D - \varepsilon)\|u - v\|_E.$$

7 Man beweise das globale Folgenkriterium: *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.*

Lösung Zu zeigen ist die Stetigkeit von f in jedem Punkt von D. Sei also $a \in D$ und (x_n) irgendeine gegen a konvergierende Folge in D. Nach Voraussetzung konvergiert auch die Folge $(f(x_n))$ gegen einen Grenzwert

$$w = \lim f(x_n).$$

Angenommen, es ist $w \neq f(a)$. Dann ergänzen wir die Folge (x_n), indem wir nach jedem Folgenglied ein Folgenglied a einfügen. Die neue Folge $(\tilde{x}_n)$ konvergiert dann ebenfall gegen a, aber die Bildfolge $(f(\tilde{x}_n))$ hätte w und $f(a)$ als Häufungswerte. Dies ist ein Widerspruch, und es ist

$$w = f(a).$$

Votieraufgaben

1 Man bestimme die Grenzwerte

a. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3+t^2-t-1}{t+1}$ *b.* $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3+t^2-t-1}{t-1}$ *c.* $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3+t^2-t-1}{t^2-1}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ *e.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$.

▷ *Lösung* *a.* 0 *b.* 4 *c.* 2 *d.* 1/2 *e.* 0 ◁

2 Man bestimme die uneigentlichen Grenzwerte

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$ *b.* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$ *d.* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$

▷ *Lösung* *a.* 4 *b.* 1/2 *c.* 1/2 *d.* 0 ◁

3 Die beiden Funktionen $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig. Sind sie auf $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ gleich, so sind sie auf ganz $[a,b]$ gleich.

▷ *Lösung* Betrachte die Funktion $\phi = f-g$. Diese ist stetig und Null auf $\mathbb{Q}$. Jede irrationale Zahl x ist aber Grenzwert einer Folge (q_n) rationaler Zahlen, somit gilt auch

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(q_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Also ist $\phi\equiv 0$, und damit $f\equiv g$. ◁

4 Kann das Produkt fg oder die Komposition $f\circ g$ zweier Funktionen in einem Punkt stetig sein, auch wenn beide Funktionen in den entsprechenden Punkten unstetig sind?

▷ *Lösung* Natürlich. Man nehme zum Beispiel die in jedem Punkt unstetige Funktion

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{auf } \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{auf } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi^2\equiv 1$ und $\varphi\circ\varphi\equiv 1$. ◁

5 Zeigen Sie: Zu jeder Tageszeit gibt es antipodale Punkte auf dem Äquator mit derselben Temperatur.

▹ *Lösung* Betrachte die Differenz der Temperaturen antipodaler Punkte auf dem Äquator. Parametrisieren wir den Äquator über $t \in [0, 2\pi]$, so erhalten wir eine Funktion

$$\delta\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad \delta(t) = T(t) - T(t + \pi).$$

Diese ist stetig, denn die Temperatur macht keine Sprünge, und nimmt somit Minimum und Maximum an. Ist δ nicht konstant Null – in diesem Fall wären wir ohenhin fertig –, so haben Minimum und Maximum entgegengesetztes Vorzeichen. Also muss es auch eine Nullstelle geben. Dies ist der behauptete Punkt. ◃

Schriftaufgabe

6 Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte die Funktionalgleichung

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Man zeige sukzessive:
a. $f(0) = 0$.
b. $f(-x) = -f(x)$.
c. $f(x/n) = f(x)/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
d. $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
e. Ist f stetig in 0, so auch auf ganz $\mathbb{R}$, und mit $a = f(1)$ gilt $f(x) = ax$.

▹ *Lösung* *a.* Es ist $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Also ist $f(0) = 0$.
b. Es ist $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$. Also ist $f(-x) = -f(x)$.
c. Aus der Funktionalgleichung folgt induktiv $f(nx) = nf(x)$. Also ist

$$f(x) = f(nx/n) = nf(x/n).$$

d. Für eine rationale Zahl $r = p/q$ gilt dann

$$f(rx) = f(px/q) = pf(x/q) = (p/q)f(x) = rf(x).$$

e. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a = \lim a_n$. Dann gilt $a - a_n \to 0$ und

$$f(a) - f(a_n) = f(a - a_n).$$

Ist also f stetig bei 0, so folgt

$$f(a) - \lim f(a_n) = \lim (f(a) - f(a_n)) = \lim f(a - a_n) = f(0) = 0.$$

Somit ist $f(a) = \lim f(a_n)$, und f ist auch stetig im Punkt a. Ferner gilt dann auch

$$f(a) = f(a \cdot 1) = af(1). \qquad ◃$$

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die Linearisierungen in $a = 0$ der Funktionen f mit Funktionsterm

a. $\sqrt{1+t}$ *b.* $\dfrac{1}{1-t}$ *c.* $(1+t)^n$ *d.* $\sqrt[n]{1+t}$.

⊳ *Lösung* *a.* $1 + t/2$ *b.* $1 + t$ *c.* $1 + nt$ *d.* $1 + t/n$ ◅

2 Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung des Punktes $c \in \mathbb{R}$ erklärt, im Punkt c seien f differenzierbar, g stetig, und $f(c) = 0$. Dann ist auch fg in c differenzierbar.

⊳ *Lösung* Aufgrund der Differenzierbarkeit ist

$$f(t) = f(c) + \varphi(t)(t-c) = \varphi(t)(t-c)$$

mit einer stetigen Funktion φ. Also gilt auch

$$(fg)(t) = (\varphi g)(t)(t-c)$$

mit der stetigen Funktion φg. Also ist fg in c differenzierbar mit Ableitung

$$(fg)'(c) = (\varphi g)(c) = f'(c)g(c). \quad ◅$$

3 Für $t \geqslant 0$ und $n \geqslant 1$ ist $\sqrt[n]{t} = t^{1/n}$ definiert als die Umkehrfunktion von t^n. Bestimmen sie die Ableitung von $t^{1/n}$ mit Hilfe des Umkehrsatzes.

⊳ *Lösung* Ist $f(t) = t^n = s$, und $g(s) = s^{1/n} = t$ die Umkehrfunktion zu f, so erhält man

$$g'(s) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{nt^{n-1}} = \frac{1}{ns^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}s^{1/n-1}. \quad ◅$$

4 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-t) = f(t)$, *ungerade*, falls $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Ist f differenzierbar und gerade respektive ungerade, so ist f' ungerade respektive gerade.

⊳ *Lösung* Ist beispielsweise f ungerade, so ist $f(t) = -f(-t)$ und damit

$$f'(t) = -f'(-t)\cdot(-1) = f'(-t).$$

Also ist f' gerade. ◅

5 Die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ sei im Punkt 0 differenzierbar, und $(u_n), (v_n)$ seien zwei gegen 0 konvergierende Folgen in $(-1,1)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = f'(0),$$

wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $u_n < 0 < v_n$ für alle n.
(ii) $0 < u_n < v_n$ für alle n und $v_n/(v_n - u_n)$ ist beschränkt.

▹ *Lösung* Es ist

$$f(t) = f(0) + f'(0) + \varepsilon(t)t$$

mit einer stetigen und in 0 verschwindenden Funktion ε. Also ist

$$\frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = \frac{\varepsilon(u_n)u_n - \varepsilon(v_n)v_n}{u_n - v_n} = \varepsilon(u_n)\frac{u_n}{u_n - v_n} - \varepsilon(v_n)\frac{v_n}{u_n - v_n}. \qquad (\dagger)$$

a. In diesem Fall ist

$$\left|\frac{u_n}{u_n - v_n}\right| \leqslant 1, \qquad \left|\frac{v_n}{u_n - v_n}\right| \leqslant 1.$$

Daher konvergiert $(\dagger)$ für $n \to \infty$ gegen 0.
b. In diesem Fall ist

$$\left|\frac{u_n}{u_n - v_n}\right| \leqslant \left|\frac{v_n}{u_n - v_n}\right| \leqslant M.$$

Also konvergiert $(\dagger)$ für $n \to \infty$ ebenfalls gegen 0. ◃

Schriftaufgabe

6 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Gibt es eine affine Funktion $\alpha : t \mapsto m(t-a) + b$ mit

$$\lim_{t \to a} \frac{|f(t) - \alpha(t)|}{|t - a|} = 0,$$

so ist diese eindeutig bestimmt, und es ist $b = f(a)$ und $m = f'(a)$.

▹ *Lösung* Aus der Annahme folgt

$$|f(a) - \alpha(a)| = \lim_{t \to a} |f(t) - \alpha(t)| = \lim_{t \to a} |t - a| \cdot \lim_{t \to a} \frac{|f(t) - \alpha(t)|}{|t - a|} = 0$$

und damit $b = f(a)$. Damit folgt weiter

$$\lim_{t \to a} \frac{|f(t) - f(a) - m(t-a)|}{|t - a|} = \lim_{t \to a} \left|\frac{f(t) - f(a)}{t - a} - m\right| = 0,$$

also die Konvergenz des Differenzenquotienten gegen m. Also ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = m$. ◃

Votieraufgaben

1 Für $f \in C^n(I)$ gilt $\partial^n(tf(t)) = t\partial^n f(t) + n\partial^{n-1} f(t)$.

⊳ *Lösung* Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies offensichtlich korrekt, und für $n \geqslant 1$ folgt induktiv

$$\begin{aligned}\partial^{n+1}(tf(t)) &= \partial(t\partial^n f(t) + n\partial^{n-1} f(t)) \\ &= \partial^n f(t) + t\partial^{n+1} f(t) + n\partial^n f(t) \\ &= t\partial^{n+1} f(t) + (n+1)\partial^n f(t).\end{aligned}$$

2 Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $fg = id$, so können nicht beide Funktionen bei 0 verschwinden.

⊳ *Lösung* Sind f und g differenzierbar, so auch fg, und Differenziation er Gleichung ergibt

$$(fg)' = f'g + fg' = 1.$$

Daraus folgt sogar, dass f und g keine gemeinsamen Nullstellen haben können. ◅

3 Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lediglich beschränkt. Dann ist f mit $f(t) = t^2\varphi(t)$ bei 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

⊳ *Lösung* Dies folgt direkt aus dem Differenzierbarkeitssatz, denn es ist ja

$$f(t) = f(0) + 0 \cdot t + \varepsilon(t)t, \qquad \varepsilon(t) = t\varphi(t). \quad ◅$$

4 *Verallgemeinerter Satz von Rolle* Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $n-1$-mal stetig differenzierbar und auf (a, b) n-mal differenzierbar, wobei $n \geqslant 1$. Besitzt f Nullstellen $a_0 < a_1 < .. < a_n$ in $[a, b]$, so gibt es einen Punkt $c \in (a_0, a_n)$ mit $f^{(n)}(c) = 0$.

⊳ *Lösung* Wendet man den Satz von Rolle auf jedes Intervall $[a_{k-1}, a_k]$ mit $k = 1, .., n$ an, so erhält man n Nullstellen

$$a_1^1 < a_2^1 < .. < a_n^1$$

von f' im Intervall (a, b). Entsprechend erhält man im nächsten Schritt $n-1$ Nullstellen

$$a_2^2 < .. < a_n^2$$

von f'' im Intervall (a_1^1, a_n^1). Und so weiter erhält man schließlich zwei Nullstellen

$$a_{n-1}^{n-1} < a_n^{n-1}$$

von $f^{(n-1)}$. In diesem Intervall, und damit in (a_0, a_n), existiert somit eine Nullstelle c von $f^{(n)}$. ◅

5 Sei I ein kompaktes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Gilt für ein Polynom p_n vom Grad n die Abschätzung

$$|f(a+t) - p_n(t)| \leqslant M\,|t|^{n+1}, \qquad a+t \in I,$$

so ist $p_n = T_a^n f$.

▹ *Lösung* Mit der Taylorformel ?? und der Voraussetzung folgt

$$\left|T_a^n f(t) - p_n(t)\right| \leqslant \left|T_a^n f(t) - f(t)\right| + |f(t) - p_n(t)| \leqslant M'\,|t-a|^{n+1}$$

mit einer weiteren Konstanten M'. Also verschwinden die ersten n Ableitungen von $T_a^n f - p_n$ bei a. Ein Polynom vom Grad n hat aber diese Eigenschaft nur, wenn es identisch verschwindet. ◃

6 Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $M_r = \|f^{(r)}\|_{\mathbb{R}} < \infty$ für $r = 0, 1, 2$. Dann gilt

$$M_1^2 \leqslant 4M_0M_2.$$

Hinweis: Man stelle mithilfe der Taylorschen Formel f' durch f und f'' dar.

▹ *Lösung* Aus der Taylorschen Formel mit Lagrangeschen Restglied,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h),$$

folgt

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{h}{2} f''(a+\theta h)$$

Gehen wir zu Beträgen über und bilden danach erst rechts, dann links das Supremum über alle $a \in \mathbb{R}$, so folgt *für alle* $h > 0$

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

Die beste Schranke ergibt sich mit $h = \sqrt{4M_0/M_2}$ und liefert

$$M_1 \leqslant \sqrt{4M_0M_2}.$$ ◃

Schriftaufgabe

7 Gegeben ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin 1/t, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

a. Die Funktion f ist überall differenzierbar.
b. Es ist $f'(0) > 0$.
c. In jeder Umgebung von 0 existieren Intervalle, auf denen f streng monoton fällt.
d. Die Funktion ist nicht stetig differenzierbar.

▹▸ *Lösung* *a.* und
b. Für $t \neq 0$ erhält man

$$f'(t) = 1 + 4t \sin \frac{1}{t} - 2 \cos \frac{1}{t}, \tag{$\dagger$}$$

und für $t = 0$ gilt

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} (1 + 2t \sin 1/t) = 1.$$

c. Dies folgt aus (†) mit $\lim_{t \to 0} 4t \sin 1/t = 0$ und

$$\cos \frac{1}{t} \bigg|_{t = 1/2\pi n} = 1, \qquad n = 1, 2, .. \ .$$

d. Es ist $f'(0) = 1$, aber in jeder Umgebung von 0 nimmt f' negative Werte an. ◂◃

Votieraufgaben

1 Zur Funktion $f : t \mapsto \log \dfrac{1+t}{1-t}$ bestimme man $T_0^{2n+1} f$.

▹ *Lösung* Aus

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \mp .., \qquad \log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - ..,$$

folgt

$$\log \frac{1+t}{1-t} = \log(1+t) - \log(1-t) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + ..\right). \quad ◃$$

2 Die Umkehrfunktion zu $t \mapsto a^t$ mit $a > 0$, $a \ne 1$, ist der *Logarithmus zur Basis a*, bezeichnet mit $\log_a$. Hierfür gilt

$$\log_a t = \frac{\log t}{\log a} = \log_a \mathrm{e} \cdot \log t.$$

▹ *Lösung* Dies folgt aus dem Vergleich der Exponenten von

$$\mathrm{e}^{\log a \log_a t} = a^{\log_a t} = t = \mathrm{e}^{\log t} = a^{\log_a e \log t}. \quad ◃$$

3 Zeigen sie, dass für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \log x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \log x = 0.$$

Zeigen sie damit auch, dass $\lim_{x\searrow 0} x^x = 1$.

▹ *Lösung* Schreibe $x = \mathrm{e}^t$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} \log x = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \log \mathrm{e}^t = \lim_{t\to\infty} t\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \log x = \lim_{t\to -\infty} \mathrm{e}^{\alpha t} \log \mathrm{e}^t = \lim_{t\to\infty} -t\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = 0.$$

Mit der Stetigkeit von $\exp$ folgt hieraus

$$\lim_{x\searrow 0} x^x = \lim_{x\searrow 0} \mathrm{e}^{x \log x} = \mathrm{e}^0 = 1. \quad ◃$$

4 *a.* Sei $\omega > 0$. Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot\varphi = -\omega^2 \varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot\varphi(0) = \psi_0 \ ?$$

b. Zeigen sie, dass der Raum aller Lösungen von $\ddot\varphi = -\omega^2\varphi$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ einen zweidimensionalen reellen Vektorraum bildet. *c.* Wie sieht dieser Raum für $\omega = 0$ aus?

Lösung *a.* $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t + (\psi_0/\omega) \sin \omega t$.
b. Der Raum aller Lösungen ist

$$L = \{a \cos \omega t + b \sin \omega t : a, b \in \mathbb{R}\}$$

und ist offensichtlich zweidimensional.
c. Der Raum aller Lösungen von $\ddot{\varphi} = 0$ ist $L = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\}$.

5 *a.* Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\sin nt| \leqslant n\,|\sin t|$.
b. Es gibt $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so dass $|\sin at| > a\,|\sin t|$.

Lösung *a.* Beide Seiten sind π-periodisch und invariant unter $t \mapsto \pi - t$. Daher genügt es, die Ungleichung für $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ zu verifizieren. Da außerdem

$$n \sin t \geqslant n \sin \pi/n \geqslant 1, \qquad \pi/n \leqslant t \leqslant \pi/2,$$

können wir uns auf $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$ beschränken. Hier sind beide Seiten nichtnegativ, verschwinden bei 0, und für ihre Ableitungen gilt

$$(\sin nt)' = n \cos nt \leqslant n \cos t = n(\sin t)',$$

da $\cos nt$ für $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$ monoton fällt. Integration ergibt dann

$$\sin nt \leqslant n \sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/n.$$

b. Zum Beispiel gilt $_{9.10}$ $\sin t = 2 \sin(t/2) \cos(t/2)$ und deshalb

$$\left|\sin \frac{t}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin t}{2\cos(t/2)}\right| > \frac{1}{2}\,|\sin t|, \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Schriftaufgabe

6 *a.* Es gilt $\dfrac{t}{1+t} < \log(1+t) < t, \quad t > 0$.
b. Für $a > 0$ folgt hieraus $\exp\left(\dfrac{a}{1+a/n}\right) \leqslant \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \leqslant \exp(a), \quad n \geqslant 1$.
c. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$.

Lösung *a.* Sei

$$u(t) = t - \log(1+t), \qquad v(t) = \log(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

Dann ist $u(0) = v(0) = 0$, und für $t > 0$ gilt

$$u'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \geqslant 0, \qquad v'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \geqslant 0.$$

Also gilt $u(t) \geqslant 0$ und $v(t) \geqslant 0$ für $t \geqslant 0$.
b. Einsetzen von $t = a/n$ und multiplizieren mit n ergibt

$$\frac{a}{1+a/n} \leqslant n \ln(1 + a/n) \leqslant a.$$

Exponenziation ergibt dann

$$\exp\left(\frac{a}{1+a/n}\right) \leqslant \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leqslant \exp(a).$$

c. Für $n \to \infty$ konvergiert die linke Seite aufgrund der Stetigkeit gegen die rechte Seite. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a.$$

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie *a.* $\sin \mathrm{i}$ *b.* $\cos \mathrm{i}$ *c.* i^{i} *d.* $\sqrt[5]{\mathrm{i}}$

▷ *Lösung* *a.* $\sin \mathrm{i} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}}\mathrm{i}$
b. $\cos \mathrm{i} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}$ *c.* Wegen

$$\log \mathrm{i} = \mathrm{i}\pi/2 + 2\pi \mathrm{i} n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ist

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi/2 - 2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

d. $\sqrt[5]{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/10}\mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi/5} = \mathrm{e}^{(4k+1)\pi\mathrm{i}/10}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, 4$. ◁

2 Für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

▷ *Lösung* Mit $2\mathrm{i}\sin z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}$ erhält man

$$\begin{aligned} 4\,|\sin z|^2 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) \\ &= (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2y}) - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}) \\ &= (\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})^2 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\ &= 4\sinh^2 y + 4\sin^2 x. \end{aligned}$$

Und mit $2\cos z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}$ erhält man

$$\begin{aligned} 4\,|\cos z|^2 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) \\ &= (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{-2y}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}) \\ &= (\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})^2 + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\ &= 4\sinh^2 y + 4\cos^2 x. \end{aligned}$$

3 Lösen sie das Anfangswertproblem

$$\varphi'' = \varphi, \qquad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0$$

mit einem *Potenzreihenansatz*: Setzen sie den Ansatz $\varphi(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ in die Gleichung ein und bestimmen sie rekursiv seine Koeffizienten.

▷ *Lösung* Mit dem Ansatz $\varphi(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ ist

$$\varphi''(t) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n.$$

Koeffizientenvergleich in $\varphi'' = \varphi$ ergibt

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \geqslant 2,$$

und die Anfangswerte ergeben $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$. Also ist

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = 0, \qquad n \geqslant 0.$$ ◁

4 *Additionstheorem für die Tangensfunktion* Es gilt

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

wann immer die Ausdrücke $\tan u$, $\tan v$ und $\tan(u+v)$ erklärt sind.

▹ *Lösung* Dies ist eine direkte Rechnung. Mit $\tan t = \sin t / \cos t$ wird

$$\begin{aligned}\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} &= \frac{\dfrac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v}}{\dfrac{\cos u \cos v - \sin u \sin v}{\cos u \cos v}} \\ &= \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} \\ &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \tan(u+v)\end{aligned}$$

mit den Additionstheoremen für sin und cos $_{9.10}$. ◃

5 *a.* Für $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ gilt

$$\frac{1}{1-t} \leqslant \mathrm{e}^{2t}.$$

b. Sind $p_1, .., p_m$ alle Primzahlen, die eine der Zahlen $1, 2, .., n$ teilen, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} \leqslant \exp\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{2}{p_l}\right).$$

c. Schließen sie hieraus, dass die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen divergiert:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

▹ *Lösung* *a.* Es ist

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1-t}\right)' = \frac{2t-1}{(1-t)^2}\mathrm{e}^{-2t} \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1/2.$$

Somit gilt

$$\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1-t} \leqslant \left.\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1-t}\right|_{t=0} = 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1/2.$$

Das ist äquivalent zur Behauptung.

b. Sei N der größte Exponent eines Primfaktors in den Zahlen $2, .., n$. Dann gilt $_{6.1}$

$$\left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} = \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{1}{p_l^\nu} \geqslant \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{p_l^\nu}$$

und

$$\prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right) \geqslant \prod_{l=1}^{m} \left(\sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{p_l^\nu}\right).$$

Multiplizieren wir das letzte Produkt aus, so erhalten wir eine Summe über die Kehrwerte von $p_1^{\nu_1} \cdot\cdot\, p_m^{\nu_m}$ mit $0 \leqslant \nu_i \leqslant N$. Diese Summe enthält somit auf jeden Fall die Kehrwerte von $1, .., n$. Also gilt die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung folgt mit Teil (*a*):

$$\prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} \leqslant \prod_{l=1}^{m} \exp\left(\frac{2}{p_l}\right) = \exp\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{2}{p_l}\right).$$

c. Gehen wir zuerst zum Grenzwert $m \to \infty$ und dann zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so folgt aus der Divergenz der harmonischen Reihe 6.4

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{2}{p_l}\right) = \infty,$$

was die Behauptung ergibt. Somit sind Primzahlen gar nicht so selten . . . ◅