7

Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man ›in einem Zug und ohne abzusetzen‹ zeichnen kann.

Natürlich ist dies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

Präziser ist schon folgende Vorstellung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε, so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε-δ-Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab.

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

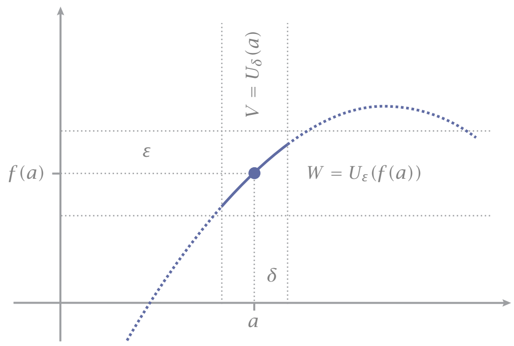


Abb 1

Im Punkt a stetige Funktion

7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst reelle Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei D eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dafür schreiben wir auch kurz

$$f\colon\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}.$$

Typischerweise ist D ein Intervall, aber dies spielt für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

1 **Definition** *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$t \in D \wedge |t-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \rtimes \tag{1}$$

Drücken wir dies mit Umgebungen aus, so ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \quad\Rightarrow\quad f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \tag{2}$$

oder noch kürzer

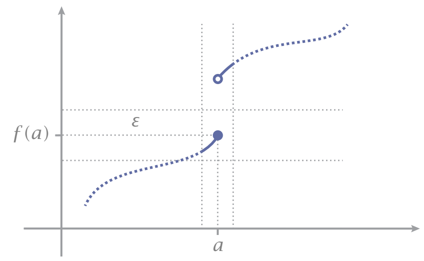
$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{3}$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε-Streifen W um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ-Streifen V um den Urbildpunkt a gibt, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist $_{\text{Abb 1}}$.

Man beachte, dass nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ-Umgebung von a definiert ist.

Abb 2

Im Punkt a unstetige Funktion



▷ *Beispiele* A. Eine konstante Funktion $t \mapsto c$ ist in jedem Punkt stetig.

B. Eine lineare Funktion $t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ wähle

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + |m|}.$$

Für $|t - a| < \delta$ gilt dann

$$|(mt + b) - (ma + b)| \leqslant |m|\,|t - a| < |m|\,\delta < \varepsilon.$$

Dieses δ können wir unabhängig vom Punkt t wählen.

C. Für die Parabel $t \mapsto t^2$ gilt aufgrund der zweiten binomischen Formel

$$|t^2 - a^2| = |t - a|\,|t + a|.$$

In einer kleinen Umgebung von a ist $|t + a| < 1 + |a|$. Wählen wir also

$$|t - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + |a|}$$

für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so wird

$$|t^2 - a^2| < \delta\,|t + a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall hängt δ sowohl von ε als auch von a ab. ◁

Definition *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt unstetig im Punkt $a \in D$, wenn sie dort nicht stetig ist.* ⋊

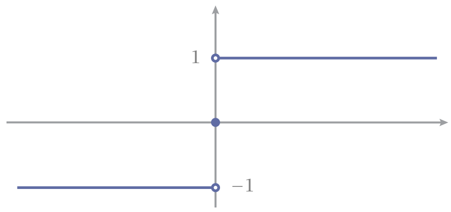
Somit ist f im Punkt a *unstetig*, wenn es *ein* $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in *jeder* δ-Umgebung von a *wenigstens ein* Punkt $t \in D$ existiert, so dass

$$f(t) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

Stetigkeit in einem Punkt ist eine *lokale Eigenschaft*. Das heißt, sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Mehr noch, man kann von der Stetigkeit in einem Punkt a *nicht* auf

Abb 3

Signumfunktion



die Stetigkeit in einem anderen Punkt b schließen, auch wenn er noch so nahe bei a liegt. Ein Beispiel hierfür ist die Thomaefunktion A-12.

Nun noch die *globale* Stetigkeit.

Definition *Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* ⋊

Umgekehrt ist f auf D *unstetig*, wenn sie in wenigstens *einem* Punkt von D unstetig ist. *Ein* unstetiger Punkt genügt also, um die Stetigkeit auf ganz D zu ruinieren.

2 ▷ a. Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

b. Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

ist in 0 unstetig und in allen anderen Punkten stetig.

c. Die Gaußklammer $t \mapsto [t]$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig.

d. Die *Dirichletfunktion*

$$\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

e. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Einschränkung von f auf eine beliebige Teilmenge von D stetig. Für die Stetigkeit ist es daher unerheblich, ob die Definitionsmenge D eine ›schöne‹ Menge ist. ◁

■ Stetige Abbildungen

Der Begriff der Stetigkeit ist nicht nur für reellwertige Funktionen auf der reellen Geraden erklärt. Er ist auch sinnvoll für Abbildungen zwischen Räumen,

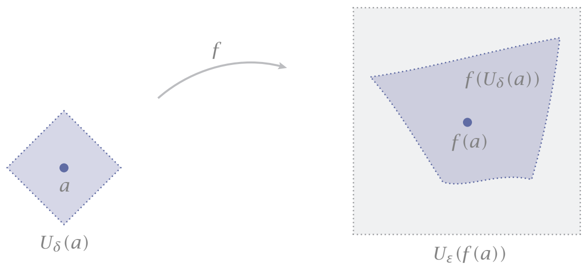


Abb 4

Im Punkt a stetige Abbildung

in denen in irgendeiner Weise ein Abstand definiert ist. Als erste Verallgemeinerung in diese Richtung definieren wir nun Stetigkeit für Abbildungen zwischen *normierten Vektorräumen*. Für den Anfang kann man sich darunter den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm vorstellen.

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und

$$f\colon\ E \supset D \to F$$

eine Abbildung, wobei D eine beliebige Teilmenge von E sein darf. Die Stetigkeitsdefinition 1 überträgt sich auf diese Situation, wenn wir den reellen Betrag durch die entsprechenden Normen ersetzen.

Definition *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$x \in D \ \wedge\ \|x - a\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \qquad \rtimes$$

Um dies wie in (2) und (3) durch Umgebungen auszudrücken, sei

$$U_\delta(a) \coloneqq \{x \in E :\ \|x - a\|_E < \delta\},$$
$$U_\varepsilon(b) \coloneqq \{y \in F :\ \|y - b\|_F < \varepsilon\}.$$

Dann erhalten wir folgende

Äquivalente Definition *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder ε-Umgebung um $f(a)$ eine δ-Umgebung um a existiert, so dass*

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \qquad \rtimes$$

Für $D \subset \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{R}$ erhalten wir wieder unsere Definition für reelle Funktionen 1. — Globale Stetigkeit ist wie zuvor erklärt:

Definition *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* $\rtimes$

Das Folgenkriterium

Der nächste Satz charakterisiert Stetigkeit mithilfe von Folgen. Dies erlaubt uns, Stetigkeitssätze aus entsprechenden Sätzen über Folgen zu erhalten.

3 **Folgenkriterium** *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \qquad \rtimes$$

Wichtig: Dies muss für *jede* Folge in D mit Grenzwert a gelten, nicht nur für eine, die einem gerade gut passt.

⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und (x_n) eine beliebige gegen a konvergierende Folge in D. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Wegen $x_n \to a$ existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\|x_n - a\|_E < \delta, \qquad n \geqslant N.$$

Da alle x_n in D liegen, gilt auch $x_n \in U_\delta(a) \cap D$ für $n \geqslant N$, und wir erhalten

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geqslant 1$ existiert, gilt $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$ Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen, f ist *nicht* stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ einen Punkt $x_n \in U_{1/n}(a) \cap D$ mit

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Wir erhalten eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. ⟩⟩⟩⟩

Die Negation des Folgenkriteriums $_3$ ergibt ein handliches

4 **Unstetigkeitskriterium** *Gibt es wenigstens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, so ist f im Punkt a unstetig.* $\rtimes$

▹ *Beispiele* A. Die Gaußklammer ist unstetig in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} [m - 1/n] = m - 1 \neq [m] = m.$$

B. Die Signumfunktion ist unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(-1/n) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(1/n) = 1,$$

aber $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◃

Nun noch die globale Version des Folgenkriteriums. Der Beweis sei als Übung überlassen $_{A\text{-}5}$.

7.6

5 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.* ⋊

Ist also f auf D stetig und konvergiert die Folge (x_n) in D, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also ›lim‹ und ›f‹ vertauschen.

■ Stetigkeitssätze

Wie bei der Konvergenz von Folgen fragen wir nun, wie sich Stetigkeit mit Körper- und Vektorraumoperationen verträgt. Zuerst betrachten wir reellwertige Funktionen auf einer beliebigen Teilmenge D eines normierten Vektorraums E und die Körperoperationen in $\mathbb{R}$.

6 **Satz** *Sind die Funktionen $f, g: E \supset D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g, falls $g(a) \neq 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel f/g. Ist (x_n) eine beliebige Folge in D mit Grenzwert a, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g $_3$

$$f(x_n) \to f(a), \qquad g(x_n) \to g(a).$$

Wegen $g(a) \neq 0$ gilt dann auch $_{5.7}$ $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/g(a)$. Das ist gleichbedeutend mit

$$(f/g)(x_n) \to (f/g)(a).$$

Da dies für jede solche Folge gilt, ist f/g in a stetig $_3$. Alles Übrige beweist man genauso. ⟩⟩⟩⟩⟩

7 **Korollar** *Sind die Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g, falls $g \neq 0$ auf ganz D.* ⋊

Bemerkung Aufgrund dieses Satzes bildet der Raum

$$C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } D\}$$

einen reellen linearen Vektorraum. Da auch das Produkt zweier Elemente in ihm erklärt ist, ist er sogar eine Algebra. ⊸

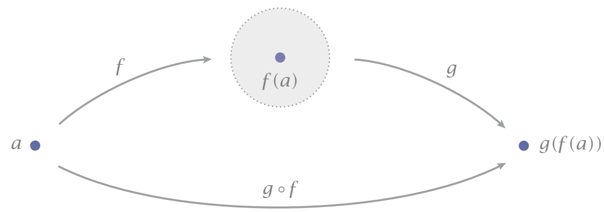
▹ *Beispiel* Aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion folgt $_6$ die Stetigkeit aller *Polynome*, also Funktionen $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + .. + a_1 t + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, .., a_n$. ◃

Abb 5

Komposition von f und g



Für Abbildungen in einen beliebigen normierten Vektorraum F sind lediglich Linearkombinationen erklärt. Der entsprechende Satz lautet hier $_{5.37}$:

8 **Satz** *Sind die Abbildungen $f, g\colon E \supset D \to F$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist es auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g\colon D \to F$. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit auf ganz D.* ⋊

Wir betrachten nun die Komposition zweier stetiger Abbildungen. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass diese Komposition wohldefiniert ist.

9 **Satz** *Die Komposition $g \circ f$ sei auf D wohldefiniert. Ist f stetig im Punkt $a \in D$ und g stetig im Punkt $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig im Punkt a.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (x_n) eine konvergente Folge in D mit $x_n \to a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(x_n) \to f(a)$ $_3$. Dann gilt auch $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$ $_3$. Somit gilt auch

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a).$$

Da dies für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt, ist $g \circ f$ im Punkt a stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

10 **Korollar** *Ist f stetig auf D und g stetig auf einer Obermenge von $f(D)$, so ist auch $g \circ f$ stetig auf D.* ⋊

▹ Die Funktion

$$t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Denn das Polynom $1 + t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ, und die Wurzel ist auf $[0, \infty)$ ebenfalls stetig, wie wir in Abschnitt 2 sehen werden. ◃

▪ Lipschitzstetige Abbildungen

Eine wichtige und sehr handliche Klasse stetiger Abbildungen bilden die *lipschitzstetigen* Abbildungen.

Definition *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ heißt lipschitzstetig auf D, wenn es eine Konstante $L \geqslant 0$ gibt, genannt Lipschitzkonstante, so dass*

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E\,, \qquad u, v \in D.$$

Eine solche Funktion mit Lipschitzkonstante L heißt auch L-lipschitz. ⋊

Bemerkungen *a.* Mit L ist auch jede reelle Zahl $L' \geqslant L$ eine Lipschitzkonstante.

b. Ist f lipschitz auf D, so ist

$$L_* = \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E} < \infty,$$

und dies ist auch die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D A-17.

c. Lipschitzstetige Funktionen heißen auch *dehnungsbeschränkt*, was diese Eigenschaft recht anschaulich beschreibt. ⊸

Die Berechtigung der Bezeichnung ergibt sich aus dem nächsten Lemma.

11 **Lemma** *Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei f L-lipschitz. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon/(L+1) > 0$. Für alle u, v im Definitionsbereich von f mit $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E < L\delta = \frac{L}{L+1}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Da δ unabhängig vom betrachteten Punkt ist, folgt daraus die Stetigkeit von f auf dem gesamten Definitionsbereich. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Auf jedem normierten Raum sind konstante Funktionen 0-lipschitz, und die Identität ist 1-lipschitz.

B. Auf jedem normierten Raum ist die Norm $\|\cdot\|$ 1-lipschitz, denn dies ist gerade die umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leqslant \|u - v\|\,.$$

Insbesondere ist die Betragsfunktion $|\cdot|$ 1-lipschitz auf $\mathbb{R}$.

C. Auf $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen

$$z \mapsto \Re z, \qquad z \mapsto \Im z, \qquad z \mapsto \bar{z}$$

sämtlich 1-lipschitz. Zum Beispiel ist

$$|\Im z - \Im w| = \left|\frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} - \frac{w - \bar{w}}{2\mathrm{i}}\right| \leqslant \frac{|z - w| + |\bar{z} - \bar{w}|}{2} = |z - w|\,.$$

D. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* lipschitz, denn für $u > v = 0$ ist

$$\frac{|u^2 - v^2|}{|u - v|} = \frac{|u^2|}{|u|} = |u|$$

nicht beschränkt. Sie ist aber lipschitz auf jedem beschränkten Intervall $_{\text{A-15}}$. ◅

7.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

Wir betrachten nun einige fundamentale Eigenschaften stetiger reellwertiger Funktionen auf einem *Intervall*, also Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dazu zählen der Zwischenwertsatz $_{14}$, der Satz über Umkehrfunktionen $_{18}$, und der Satz vom Minimum & Maximum $_{16}$. — Zuerst die Zwischenwertsätze.

12 **Zwischenwertsatz von Bolzano** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \ne f(b)$. Dann existiert zu jeder reellen Zahl w zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein Punkt $c \in (a,b)$ mit $f(c) = w$.* ⋊

Bemerkung Der Zwischenwertsatz gilt offensichtlich *nicht*, wenn f *nicht stetig* oder der Definitionsbereich *kein Intervall* ist – siehe Abbildung 7. ⊸

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir können annehmen, dass $f(a) < w < f(b)$. Andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-w$ über und wenden den folgenden Beweis darauf an.

Betrachte die Menge

$$A \coloneqq \{t \in [a,b] : f(t) < w\} \subset [a,b].$$

Diese Menge ist nicht leer, denn $a \in A$. Außerdem ist sie beschränkt. Somit existiert $c = \sup A$, und offensichtlich ist $c \in [a,b]$. Wir zeigen, dass $f(c) = w$.

Aufgrund des Approximationssatzes $_{5.28}$ existiert eine Folge (t_n) in A mit $\lim_{n\to\infty} t_n = c$. Mit der Stetigkeit von f und $f(t_n) < w$ für alle n folgt $_{5.9}$

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(c) \leqslant w.$$

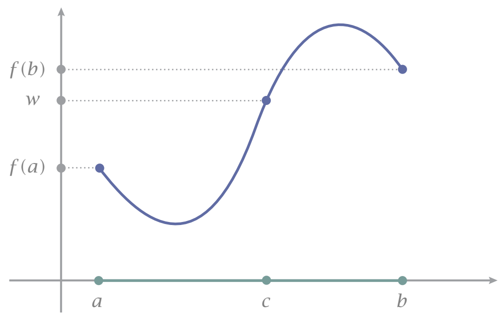
Wegen $w < f(b)$ ist $c \ne b$ und somit $c < b$. Wäre nun $f(c) < w$, so wäre f aus Stetigkeitsgründen auch in einer kleinen, ganz in $[a,b]$ enthaltenen Umgebung von c kleiner als w. Es gäbe also ein $d \in [a,b]$ mit

$$c < d < b, \qquad f(d) < w.$$

Dann aber wäre $d \in A$, im Widerspruch zur Definition von c als dem Supremum von A. Also gilt nicht $f(c) < w$, sondern $f(c) = w$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 6

Zwischenwertsatz von Bolzano



Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz einer *Nullstelle* einer Funktion, also eines Punktes x mit $f(x) = 0$.

13 **Nullstellensatz** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$, so besitzt f in (a,b) mindestens eine Nullstelle.* ⋊

⟪⟪ Entweder ist $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. In beiden Fällen können wir den Satz von Bolzano $_{12}$ mit $w = 0$ anwenden. ⟫⟫

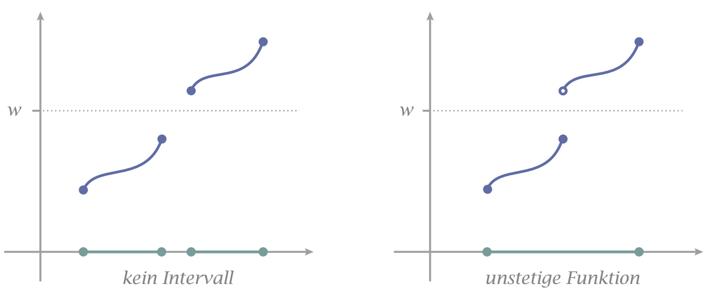
▹ *Beispiel* Jedes reelle Polynom p ungeraden Grades,

$$p(t) = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + .. + a_1t + a_0,$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Denn ein solches Polynom definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die für hinreichend große t positiv und hinreichend kleine t negativ wird. Die Existenz einer Nullstelle folgt damit aus dem Nullstellensatz $_{13}$.

Dies gilt natürlich nicht für Polynome geraden Grades. Das Polynom $t^2 + 1$ beispielsweise besitzt keine reelle Nullstelle. ◃

Abb 7 Zwischenwertsatz von Bolzano nicht anwendbar



Der Zwischenwertsatz von Bolzano lässt sich noch verallgemeiner formulieren. Sei dazu

$$\sup_I f \coloneqq \sup f(I) = \sup \{ f(t) : t \in I \},$$

und analog $\inf_I f$. Diese dürfen auch den Wert ∞ respektive $-\infty$ annehmen.

14 **Allgemeiner Zwischenwertsatz** *Sei I ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf_I f$ und $\sup_I f$ mindestens einmal an.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei $\inf_I f < w < \sup_I f$. Dann gibt es aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ Punkte $a \in I$ und $b \in I$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wenden wir den Satz von Bolzano $_{12}$ auf die Einschränkung von f auf das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b an, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Alle drei Zwischenwertsätze sind tatsächlich *äquivalent:* aus jedem lassen sich die beiden anderen ableiten $_{\text{A-9}}$. ⊸

Geometrisch betrachtet ist der allgemeine Zwischenwertsatz äquivalent zu folgender Formulierung.

15 **Intervallabbildungssatz** *Stetige Bilder von Intervallen sind wieder Intervalle. Das heißt, ist I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Besteht $f(I)$ nur aus einem Punkt, so sind wir fertig. Gehören zwei Punkte $u < v$ zu $f(I)$, so nimmt f also die Werte u und v an. Dann nimmt f aufgrund des Zwischenwertsatzes $_{14}$ auf I auch jeden dazwischen liegenden Wert an. Es gilt also auch $[u, v] \subset f(I)$. Somit enthält $f(I)$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte. *Per definitionem* ist $f(I)$ damit ein Intervall. ⟩⟩⟩⟩

▪ Minimum & Maximum

Für eine beliebige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ existiert immer $\sup_I f$ auf der erweiterten Zahlengeraden. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen. Es muss auch keinen Punkt in I geben, an dem f diesen Wert annimmt, auch wenn f beschränkt ist. Einfache Beispiele sind in Abbildung 8 skizziert.

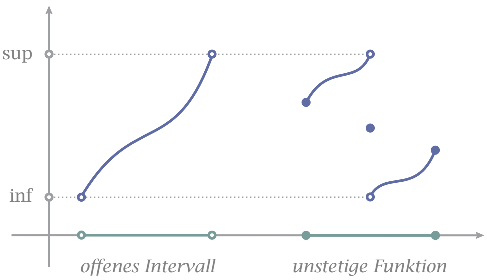
Gibt es dagegen einen Punkt $c \in I$ mit $f(c) = \sup_I f$, so spricht man von einem *Maximum* und sagt, f *nimmt sein Supremum im Punkt c an* [1]. Man schreibt

$$\sup_I f = \max_I f = f(c)$$

[1] Gebräuchlicher ist die nicht ganz korrekte Formulierung, f nehme sein *Maximum* an.

Abb 8

Kein Minimum oder Maximum



und nennt c selbst eine *Maximalstelle* von f. Ein Maximum ist in jedem Fall endlich. Entsprechend sind das *Minimum* $\min_I f$ und eine *Minimalstelle* erklärt.

16 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte $u, v \in [a,b]$ mit*

$$f(u) \leqslant f(t) \leqslant f(v), \qquad t \in [a,b].$$

Insbesondere gilt also

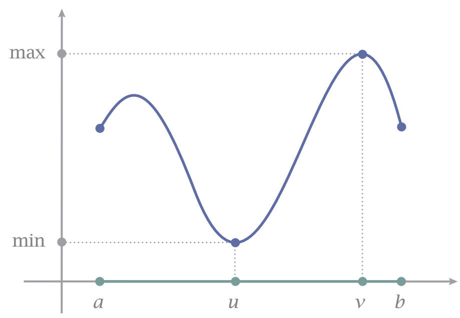
$$f(u) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f, \qquad f(v) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f. \quad \rtimes$$

Eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen* Intervall nimmt also immer ihre Extrema an. Dies gilt im Allgemeinen *nicht*, wenn das Intervall nicht abgeschlossen oder die Funktion nicht stetig ist Abb 8 .

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$, wobei im Moment auch $-\infty$ zugelassen ist. Aufgrund des erweiterten Approximationssatzes 5.28 existiert eine Folge (t_n) in $[a,b]$ mit $f(t_n) \to m$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 5.17 eine konvergente Teilfolge (t_{n_k}) mit Grenzwert u. Da $a \leqslant t_n \leqslant b$ für alle n, ist auch $a \leqslant u \leqslant b$. Es gilt also

Abb 9

Satz vom Minimum & Maximum



$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = u \in [a,b]\,.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = f(u).$$

Da aber $f(t_{n_k})$ Teilfolge der konvergenten Folge $f(t_n)$ ist, erhalten wir insgesamt

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = m = \inf_{[a,b]} f.$$

Insbesondere ist m *endlich.* – Entsprechend für das Supremum. ⟫⟫⟫

Damit erhalten wir auch eine Verbesserung des Intervallabbildungssatzes 15 für abgeschlossene Intervalle.

17 **Korollar** *Eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und bildet dieses auf ein abgeschlossenes Intervall ab.* ⋊

Für die anderen Intervalltypen gilt dieses Korollar nicht. Eine stetige Funktion kann auf einem offenen Intervall unbeschränkt sein, oder das Bild kann ein abgeschlossenes Intervall sein.

▪ Umkehrfunktionen

Wir betrachten nun eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die außerdem *injektiv* ist. Aufgrund des Intervallabbildungssatzes 15 ist $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und aufgrund der Injektivität existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf J. Diese Funktion ist ebenfalls stetig:

18 **Satz über stetige Umkehrfunktionen** *Sei I ein Intervall. Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist auch $f^{-1}\colon J \to I$ mit $J = f(I)$ stetig.* ⋊

⟪⟪⟪ Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir $I = [a,b]$ annehmen. In diesem Fall ist auch J ein abgeschlossenes Intervall 17. Sei nun (s_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert s in J, und (t_n) die Folge ihrer Bilder unter f^{-1} in $I = [a,b]$. Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstrass besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge (t_n'). Für deren Grenzwert t gilt dann, aufgrund der Stetigkeit von f,

$$f(t) = \lim f(t_n') = \lim s_n' = s,$$

denn jede Teilfolge von (s_n) hat ja denselben Grenzwert s. Also ist

$$t = f^{-1}(s).$$

Das aber bedeutet, dass *jede* konvergente Teilfolge von (t_n) denselben Grenzwert t hat. Da die Folge selbst beschränkt ist, ist sie damit auch konvergent A-5.20, und wir erhalten

$$\lim f^{-1}(s_n) = f^{-1}(s).$$

Also ist f^{-1} stetig im Punkt s. Da s beliebig war, ist f^{-1} stetig auf J. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für stetige Funktionen auf einem beliebigen Definitionsbereich kann es recht schwierig sein, ihre Injektivität festzustellen. Auf Intervallen reduziert sich das Problem allerdings auf die einfache Frage, ob f streng monoton ist.

19 **Definition** *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt monoton steigend, falls*

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) \leqslant f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Analog sind monoton fallend und streng monoton fallend definiert. Schließlich heißt eine Funktion (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt. ⋊

▷ A. Jede konstante Funktionen $t \mapsto c$ ist auf $\mathbb{R}$ monoton steigend *und* monoton fallend, aber natürlich nicht streng monoton.

B. Die Identitätsfunktion $t \mapsto t$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

D. Die Cosinusfunktion 9.3 ist auf den abgeschlossenen Intervallen

$$I_n^- = [(2n-1)\pi, 2n\pi], \qquad I_n^+ = [2n\pi, (2n+1)\pi], \qquad n \in \mathbb{Z},$$

streng monoton steigend respektive streng monoton fallend. ◁

20 **Lemma** *Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f injektiv genau dann, wenn f streng monoton ist.* ⋊

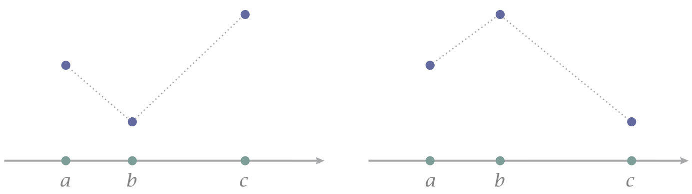
⟨⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Das ist klar.

$\Rightarrow$ Angenommen, f ist nicht streng monoton. Dann muss es in I je ein Segment geben, auf dem f steigt respektive fällt. Dann gibt es aber auch drei Punkte $a < b < c$ in I, so dass

$$f(a) > f(b) < f(c) \qquad \text{oder} \qquad f(a) < f(b) > f(c).$$

In jedem Fall folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens zwei Punkten in I, an denen f denselben Wert annimmt, also nicht injektiv ist. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 10 Zum Beweis des Lemmas



Als erste Anwendung erhalten wir – *endlich* – die Existenz der n-ten Wurzel als stetige Funktion auf der Halbgeraden $[0, \infty)$.

21 **Wurzelsatz** *Für jedes $n \geqslant 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ auf $[0, \infty)$ eine streng monoton steigende, stetige Umkehrfunktion*

$$[0, \infty) \to [0, \infty), \quad t \mapsto \sqrt[n]{t},$$

genannt die n-te Wurzelfunktion. ⋊

7.3 Funktionsgrenzwerte

Ist eine Funktion f in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs stetig, so ist

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f, die gegen a konvergiert $_3$. Ein solcher Grenzwert kann aber auch dann existieren, wenn f im Punkt a gar nicht definiert oder dort unstetig ist.

⊳ *Beispiel* Es ist $_{3.13}$

$$\frac{t^3 - 1}{t - 1} = t^2 + t + 1.$$

Die links stehende Funktion ist bei $t = 1$ nicht definiert, die rechts stehende dagegen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Man kann daher erwarten, dass

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = 3. \qquad ◅$$

Wir wollen solche Grenzwerte unabhängig von einem eventuell vorliegenden Funktionswert definieren, und das auch in solchen Punkten, wo die Funktion nur in einer Umgebung, aber nicht im Punkt selbst definiert ist. Dazu benötigen wir den Begriff des *Häufungspunktes* einer Menge.

Definition *Sei E ein normierter Vektorraum und $D \subset E$. Ein Punkt $a \in E$ heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von D liegen.* ⋊

▷ A. Eine endliche Menge besitzt *keine* Häufungspunkte.

B. Die Menge $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ besitzt 0 als einzigen Häufungspunkt.

C. Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besitzt jede reelle Zahl als Häufungspunkt.

D. Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ konvergent mit Grenzwert a und sind unendlich viele Folgenglieder verschieden, so ist a der einzige Häufungspunkt der Menge $A = \{a_n : n \geqslant 1\}$. Gibt es dagegegen nur endlich viele verschiedene Folgenglieder, so ist A endlich und hat keinen Häufungspunkt. ◁

Definition *Sei $f : E \supset D \to F$ eine Abbildung und a ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $w \in F$ der Grenzwert von f im Punkt a, geschrieben*

$$\lim_{x \to a} f(x) = w,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(\dot{U}_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(w), \tag{4}$$

wobei

$$\dot{U}_\delta(a) \coloneqq U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in E : 0 < \|x - a\|_E < \delta\}$$

die punktierte δ-Umgebung des Punktes $a \in E$ bezeichnet. ⋊

Die Bedingung (4) ähnelt der Stetigkeitsbedingung in (3), nur wird hier die Funktion f an der Stelle a *nicht* ausgewertet. Sie muss daher auch nicht in a definiert sein. Andererseits ist für einen Häufunspunkt a die Menge $\dot{U}_\delta(a) \cap D$ für alle $\delta > 0$ nicht leer. Andernfalls wäre Bedingung (4) automatisch erfüllt.

22 **Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte** *Sei $f : E \supset D \to F$ und a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = w$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = w$$

für jede gegen a konvergierende Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit in einem Punkt 3. Wir wiederholen ihn hier der Einfachheit halber.

$\Rightarrow$ Gilt $\lim_{x\to a} f(x) = w$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass (4) gilt. Ist (x_n) eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit Grenzwert a, so existiert zu diesem δ wiederum ein $N \geqslant 1$, so dass $x_n \in U_\delta(a)$ für alle $n \geqslant N$. Es gilt sogar

$$x_n \in \dot{U}_\delta(a) \cap D, \qquad n \geqslant N.$$

da die Folgenglieder ja in $D\setminus\{a\}$ liegen. Also gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(w), \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ solch ein N existiert, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = w$.

$\Leftarrow$ Angenommen, es gilt *nicht* $\lim_{x\to a} f(x) = w$. Da *jede* punktierte Umgebung von a Punkte aus D enthält, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass in jeder punktierten $1/n$-Umgebung von a ein $x_n \in D$ existiert mit

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(w).$$

Diese x_n bilden eine konvergente Folge in $D\setminus\{a\}$ mit Grenzwert a, für die $f(x_n)$ sicher *nicht* gegen w konvergiert. Wir erhalten damit einen Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus diesem Kriterium ergibt sich die folgende Charakterisierung der Stetigkeit, die oft auch als deren Definition dient.

23 **Korollar** *Sei $D \subset E$ und $a \in D$ Häufungspunkt von D. Dann ist $f\colon D \to F$ stetig in a genau dann, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.* ⋊

Bemerkung Jeder Punkt einer Menge D ist entweder ein Häufungspunkt oder ein *isolierter Punkt* von D. In letzterem Fall existiert also eine Umgebung von a, die keine weiteren Punkte von D enthält. In einem isolierten Punkt ist *jede Funktion* stetig A-4. ⊸

Mit dem Folgenkriterium 22 erhalten wir Grenzwertsätze für Funktionen aus den Grenzwertsätzen für Folgen 5.7. Der Beweis der folgenden Ergebnisse ist als Übung überlassen.

24 **Grenzwertsätze** *Sei a ein Häufungspunkt von D. Besitzen die Funktionen $f,g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt a die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a} f(x) = u, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = v,$$

so gilt auch

(i) $\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda u + \mu v$,

(ii) $\lim_{x\to a} (fg)(x) = uv$,

(iii) $\lim_{x\to a} (f/g)(x) = u/v$, *falls* $v \neq 0$. ⋊

25 ⊳ A. Da die Sinusfunktion beschränkt ist, gilt $\lim_{t\to 0} t\sin t^{-1} = 0$.

B. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ dagegen hat in 0 keinen Grenzwert.

C. Die Dirichletfunktion $_2$ δ besitzt in keinem einzigen Punkt der reellen Gerade einen Grenzwert.

D. Identität (i) gilt übrigens auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F. ⊲

▪ Einseitige Grenzwerte

Auf der reellen Geraden kann man noch unterscheiden, ob man sich einem Punkt von links oder von rechts nähert. Für eine Funktion $f\colon I \to F$ mit $I \subset \mathbb{R}$ erklärt man deshalb noch den *linksseitigen Grenzwert*

$$f_-(a) \coloneqq \lim_{x \nearrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x\to a}(f \mid I_a^-)(x), \qquad I_a^- \coloneqq I \cap (-\infty, a),$$

und den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$f_+(a) \coloneqq \lim_{x \searrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x\to a}(f \mid I_a^+)(x), \qquad I_a^+ \coloneqq I \cap (a, \infty),$$

vorausgesetzt, a ist ein Häufungswert von I_a^- respektive I_a^+. Man betrachtet also nur Argumente links oder rechts des Punktes a. Andere für diese Grenzwerte übliche Bezeichnungen sind $f(a-)$ und $f(a+)$.

⊳ A. Für die Wurzelfunktion gilt $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \lim_{x\searrow 0}\sqrt{x} = 0$.

B. Für die Gaußklammer oder Ganzzahlfunktion $_{3.18}$ $[\,\cdot\,]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\searrow m}[x] = m = [m], \qquad \lim_{x\nearrow m}[x] = m - 1.$$

Man sagt dazu auch, $[\,\cdot\,]$ ist in m *rechtsseitig stetig*.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ besitzt in 0 weder einen links- noch einen rechtsseitigen Grenzwert. ⊲

Einseitige Grenzwerte existieren insbesondere immer für *monotone* Funktionen, ohne jede Stetigkeitsannahme. Das macht sie besonders nützlich.

26 **Satz** *Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f. Genauer gilt*

$$\sup_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \leqslant f(a) \leqslant f_+(a) = \inf_{(a,\infty)} f$$

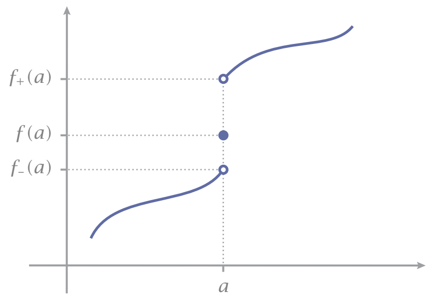
im Fall einer monoton steigenden Funktion, und

$$\inf_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \geqslant f(a) \geqslant f_+(a) = \sup_{(a,\infty)} f$$

im Fall einer monoton fallenden Funktion. ⋊

Abb 11

Einseitige Grenzwerte einer monotonen Funktion



⟪⟪ Sei zum Beispiel f monoton steigend und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $(-\infty, a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt, und es gilt

$$\lambda \coloneqq \sup_{(-\infty,a)} f \leqslant f(a).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ ein $t_\varepsilon < a$ mit

$$\lambda - \varepsilon < f(t_\varepsilon) \leqslant \lambda.$$

Aufgrund der Monotonie von f gilt dann aber auch

$$\lambda - \varepsilon < f(t) \leqslant \lambda, \qquad t_\varepsilon < t < a.$$

Das aber bedeutet, dass

$$f_-(a) = \lim_{t \nearrow a} f(t) = \lambda = \sup_{(-\infty,a)} f.$$

Entsprechend argumentiert man für den rechtsseitigen Grenzwert. ⟫⟫

Bemerkung Eine monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a genau dann, wenn $f_-(a) = f_+(a)$. Andernfalls nennt man $|f_+(a) - f_-(a)|$ die *Sprunghöhe* von f in a. ⊸

▪ Uneigentliche Grenzwerte

Für Funktionen auf der reellen Geraden sind auch *uneigentliche Grenzwerte* bei ∞ und $-\infty$ erklärt. Wir müssen dazu nur die entsprechende Umgebungen wie zuvor $_{5.6}$ betrachten, also

$$U_\delta(\infty) = (\delta^{-1}, \infty), \qquad U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta^{-1}), \qquad \delta > 0.$$

In diesem Fall sind dies bereits punktierte Umgebungen.

So ist zum Beispiel ∞ ein Häufungspunkt von $I \subset \mathbb{R}$, wenn I nach oben unbeschränkt ist. Es gilt dann

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = w,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(t) - w| < \varepsilon, \qquad t \in U_\delta(\infty) \cap I.$$

Und dies gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in I mit $t_n \to \infty$ auch

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = w.$$

Entsprechend sind uneigentliche Grenzwerte für die *Werte* von Funktionen erklärt, indem in (4) die Umgebungen von w entsprechend gewählt werden.

A. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0.$

B. $\displaystyle\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} = \infty, \qquad \lim_{t\nearrow 0} \frac{1}{t} = -\infty.$

C. Für jedes Polynom p mit $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + .. + a_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t) = (-1)^n \cdot \infty.$$

D. Eine reelle *Folge* (a_n) können wir als Funktion $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(n) = a_n$ betrachgten. Ist die Folge konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to\infty} \alpha(t).$$