5 Folgen

Eine *Folge* in einer beliebigen Menge X ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to X,$$

die man üblicherweise durch Aufzählung ihrer Funktionswerte in der Form

$$(f_1, f_2, f_3, ..) = (f_n)_{n\geqslant 1} = (f_n)_n = (f_n)$$

angibt. Man spricht von *Zahlenfolgen*, wenn f eine Abbildung nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist und alle Folgenglieder demzufolge reelle oder komplexe Zahlen sind.

An einer Zahlenfolge interessiert uns vor allem ihr *asymptotisches Verhalten* – also wie sie sich verhält, wenn der Folgenindex gegen Unendlich strebt. Gibt es zum Beispiel einen Punkt, dem sich die Folge ›immer weiter annähert‹ und den man als ihren *Grenzwert* bezeichnen könnte?

Die reelle Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ..\right)$$

beispielsweise scheint gegen 0 zu streben, denn die Folgenglieder sind positiv, werden aber immer kleiner. Dagegen hat die reelle Folge

$$((-1)^n)_{n\geqslant 1} = (-1, 1, -1, 1, -1, ..)$$

wohl keinen Grenzwert, da sie ständig zwischen 1 und -1 wechselt.

Der Begriff des Grenzwertes ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Analysis. Er präzisiert die intuitive Vorstellung, dass eine Folge einem bestimmten Punkt ›beliebig nahe kommt‹. Auf ihm basieren die Konzepte der Stetigkeit sowie der Differenziation und Integration.

5.1 Grenzwerte reeller Folgen

Wir betrachten zunächst *reelle Folgen*, also Folgen reeller Zahlen. Von zentraler Bedeutung ist der Begriff der *konvergenten Folge* und ihres *Grenzwertes*.

Definition *Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ reeller Zahlen heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ existiert mit der Eigenschaft, dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Diese Zahl a heißt der Grenzwert der Folge, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

und man sagt, (a_n) konvergiert gegen a für n gegen Unendlich. ⋊

Andere Schreibweisen hierfür sind

$$a_n \to a, \qquad n \to \infty,$$

oder auch nur kurz $a_n \to a$ oder $\lim a_n = a$.

Die in der Definition geforderte Eigenschaft wird als *ε-N-Test* bezeichnet. Zu jeder *Fehlerschranke* $\varepsilon > 0$ muss es eine *Indexschranke* $N \geqslant 1$ geben, jenseits derer *alle* Folgenglieder einen Abstand kleiner als ε von a haben:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Umgekehrt bedeuet dies, dass *höchstens endlich viele* Folgenglieder einen Abstand größer oder gleich ε von a haben, und zwar allenfalls $a_1, .., a_{N-1}$.

Im ε-N-Test hängt die Schranke N im Allgemeinen von ε ab, weshalb man auch oft $N(\varepsilon)$ schreibt. Es ist aber nicht erforderlich, diese Abhängigkeit *explizit* anzugeben, oder das bestmögliche N zu suchen. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon)$ *gibt*.

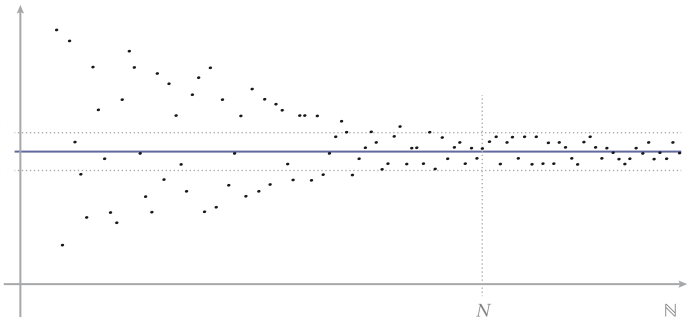
Im ε-N-Test kommt es auch auf große ε nicht an. Es genügt, hinreichend *kleine* ε zu betrachten. Gilt der ε-N-Test für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ mit irgendeinem $\varepsilon_0 > 0$, so gilt er auch für *alle* $\varepsilon > 0$.

Bei Konvergenzfragen kommt es auch nicht auf die ersten Folgenglieder an. Es spielt keine Rolle, ob die Indizierung einer Folge bei 0, 1, oder irgend einer anderen natürlichen Zahl beginnt. Daher kann man auf eine explizite Angabe im Allgemeinen verzichten, wenn es nur um den Grenzwert geht.

Schließlich spielt es im ε-N-Test keine Rolle, ob man $|a_n - a| < \varepsilon$ oder $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$, oder ob man $n \geqslant N$ oder $n > N$ fordert. Alle möglichen Formulierungen sind äquivalent.

Abb 1

ε-N-Test



⊳ *Triviales Beispiel* Jede *konstante* reelle Folge $(a)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent mit Grenzwert a. — Hier ist also $a_n = a$ für alle $n \geqslant 1$. ⊲

1 ⊳ *Beispiel* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ⊲

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Prinzip des Archimedes $_{3.9}$ eine natürliche Zahl $N > 1/\varepsilon$. Mit $1/N < \varepsilon$ gilt dann für alle $n \geqslant N$ ebenfalls

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Somit gilt auch

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Damit haben wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N \geqslant 1$ gefunden. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Eindeutigkeit und Beschränktheit

Die Definition des Grenzwertes suggeriert, dass eine konvergente Folge nur *einen* Grenzwert haben kann. Auch wenn dies offensichtlich erscheint, erfordert es einen Beweis.

2 **Eindeutigkeitssatz** *Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge ist eindeutig bestimmt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte $\tilde{a}$ und $\hat{a}$. Dann ist $\varepsilon := |\tilde{a} - \hat{a}| > 0$. Zu $\varepsilon/2$ existieren ein $\tilde{N} \geqslant 1$ und $\hat{N} \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - \tilde{a}| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant \tilde{N},$$
$$|a_n - \hat{a}| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant \hat{N}.$$

Mit irgendeinem $N \geqslant \max(\tilde{N}, \hat{N})$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{a} - \hat{a}| \leqslant |\tilde{a} - a_N| + |a_N - \hat{a}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}|$. ⟩⟩⟩⟩⟩

3 **Beschränktheitssatz** *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt. Das heißt, es gibt ein reelle Zahl $M \geqslant 0$, so dass $|a_n| \leqslant M$ für alle n.* ⋊

Mit anderen Worten, eine reelle Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist beschränkt, wenn die Menge ihrer Folgenglieder $\{a_n : n \geqslant 1\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist.

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a, so gibt es zum Beispiel zu $\varepsilon = 1$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a| < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also gilt mit der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < |a| + 1, \qquad n \geqslant N.$$

Wählen wir jetzt

$$M = \max\{|a_1|, .., |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

so gilt $|a_n| \leqslant M$ für *alle* n. Somit ist die Folge (a_n) beschränkt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Definition *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.* ⋊

▷ *Beispiele* A. Die reelle Folge $((-1)^n)_{n \geqslant 1}$ ist divergent.
B. Jede unbeschränkte Folge ist divergent 3.
C. Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist divergent A-4. ◁

Die Beispiele zeigen insbesondere, dass aus der Beschränktheit einer Folge allein nicht deren Konvergenz folgt. Wir werden jedoch bald sehen, dass jede *beschränkte monotone* Folge konvergiert, und dass jede beschränkte Folge eine *konvergente Teilfolge* besitzt.

5.2 Grenzwertsätze

Um Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, verwendet man den ε-N-Test eher selten. Meistens greift man auf bereits bekannte Grenzwerte zurück und wendet *Grenzwertsätze* an. Dabei ist es bequem, den Begriff der konvergenten Folge auf den Begriff der *Nullfolge* zurückzuführen. Dies sind konvergente Folge mit Grenzwert 0.

4 **Notiz** *Eine reelle Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Gilt $a_n \to a$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dies ist aber äquivalent mit

$$|(a_n - a) - 0| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N,$$

also zu der Aussage, dass $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

5 **Majorantenkriterium** *Gilt $|a_n - a| \leqslant |b_n|$ für alle n mit einer Nullfolge (b_n), so ist die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|b_n| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $|a_n - a| \leqslant |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Somit konvergiert (a_n) gegen a. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiel* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Denn

$$\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

und die rechte Seite bildet eine Nullfolge [1]. ◃

Nullfolgen haben die nützliche Eigenschaft, ›robust‹ zu sein. Multiplizieren wir sie gliedweise mit einer Folge, von der wir nur wissen, dass sie *beschränkt* ist, so erhalten wir trotzdem wieder eine Nullfolge.

6 **Nullfolgensatz** *Sei (a_n) eine Nullfolge. Ist (b_n) eine Nullfolge, so ist auch $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge. Ist (b_n) nur eine beschränkte Folge, so ist (a_nb_n) immer noch eine Nullfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n| < \varepsilon/2, \quad |b_n| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N.$$

Dann gilt aber auch

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, bildet auch $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.

Sei nun (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Dann existiert ein $M > 0$, so dass

$$|b_n| \leqslant M$$

für alle n. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein N, so dass

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber gilt

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, bildet auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge. ⟫⟫⟫

Beispiele A. Ist (b_n) eine beliebige beschränkte Folge, so ist (b_n/n) eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

B. Das Produkt der Nullfolge $(1/n)$ mit der unbeschränkten Folge (n^2) ist die unbeschränkte Folge (n) und damit *divergent*. Auf die Beschränktheit der Folge (b_n) kann im Nullfolgensatz also nicht verzichtet werden.

Grenzwertgleichungen

Es folgen die klassischen Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient konvergenter Folgen.

7 **Satz** *Sind die reellen Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so konvergieren auch $(|a_n|)$, $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$, und es gilt*

$$|a_n| \to |a|, \qquad a_n + b_n \to a + b, \qquad a_n b_n \to ab.$$

Ist außerdem $b \neq 0$, so existiert a_n/b_n für alle hinreichend großen n, und

$$a_n/b_n \to a/b.$$

⟪⟪⟪ *Betrag:* Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung $_{2.8}$ gilt

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge bildet, folgt die Behauptung $_5$.

Summe: Da $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen bilden, gilt dies auch für deren Summe $((a_n + b_n) - (a + b))$. Das entspricht der Behauptung.

Produkt: Es ist

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a.$$

Nach Voraussetzung sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen, und nach dem Beschränktheitssatz $_3$ ist (b_n) beschränkt. Also sind aufgrund des Nullfolgensatzes $_6$ auch $(a_n - a)b_n$ und $(b_n - b)a$ Nullfolgen. Mit dem eben Bewiesenen ist auch deren Summe eine Nullfolge, und damit auch $(a_n b_n - ab)$. Also gilt $a_n b_n \to ab$.

Quotient: Aufgrund der eben bewiesenen Produktregel genügt es zu zeigen, dass $1/b_n \to 1/b$. Nach Voraussetzung ist $b \neq 0$ und damit $\varepsilon = |b|/2 > 0$. Dazu existiert ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber ist

$$|b_n| \geqslant |b| - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Somit ist $(1/b_n)_{n \geqslant N}$ *beschränkt*[1]. Schreiben wir jetzt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b},$$

so ist die rechte Seite das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge, also wieder eine Nullfolge $_6$. Also gilt $1/b_n \to 1/b$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt somit

$$\lim(a_n * b_n) = (\lim a_n) * (\lim b_n)$$

für $* \in \{+, \cdot, :\}$, im Fall der Division allerdings nur, wenn $\lim b_n \neq 0$. Man sagt, die Grenzwertbildung *vertauscht* mit den arithmetischen Operationen. Später werden wir dies als die *Stetigkeit* dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ interpretieren.

▷ *Beispiele* A. Bevor man Grenzwertgleichungen anwenden kann, sind oft Umformungen nötig, um konvergente Folgen zu erhalten. Ein typisches Beispiel sind Quotienten, deren Zähler und Nenner für sich betrachtet divergieren. So gilt

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \to 1.$$

B. Allgemein kürzt man rationale Ausdrücke durch die höchste Potenz, die in Zähler und Nenner auftritt:

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 3} = \frac{1/n}{1 + 2/n + 3/n^2} \to \frac{0}{1} = 0,$$

und

$$\frac{(n^2+1)(n-3)}{(2n+1)^3} = \frac{(1 + 1/n^2)(1 - 3/n)}{(2 + 1/n)^3} \to \frac{1 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$ ◁

[1] Da es auf die ersten Folgenglieder nicht ankommt, fordern wir nicht explizit, dass *alle* b_n von Null verschieden sind.

▪ Grenzwertungleichungen

Mindestens ebenso wichtig wie Gleichungen für Grenzwerte sind *Ungleichungen*. Das nächste Lemma bildet hierfür die Grundlage.

8 **Lemma** *Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge und b eine reelle Zahl. Gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung*

$$a_n \leqslant b + \varepsilon$$

für unendlich viele n, so ist

$$\lim a_n \leqslant b. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \lim a_n$. Wäre $a > b$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon \geqslant b + \varepsilon$, und dazu ein $N \geqslant 1$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Insbesondere gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon \geqslant b + \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber gilt $a_n \leqslant b + \varepsilon$ nicht mehr für unendlich viele n – ein Widerspruch. Also ist $a \leqslant b$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Typischerweise gilt $a_n \leqslant b + \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ mit einem hinreichend großen N. Aber dies wird im Beweis nicht benötigt. ⊸

9 **Grenzwertungleichung** *Die reellen Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt $a_n \leqslant b_n$ für unendlich viele n, so gilt auch*

$$\lim a_n \leqslant \lim b_n. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $b = \lim b_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \geqslant 1$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geqslant N$. Insbesondere gilt dann $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Folglich gibt es unendlich viele n mit der Eigenschaft, dass

$$a_n \leqslant b_n < b + \varepsilon.$$

Mit dem vorangehenden Lemma folgt daraus $\lim a_n \leqslant b = \lim b_n$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Achtung: Selbst wenn $a_n < b_n$ für *alle* n gelten sollte, folgt daraus *nicht*, dass die strikte Ungleichung auch für die Grenzwerte gilt. Für $a_n = -1/n$ und $b_n = 1/n$ gilt offensichtlich

$$a_n < b_n, \qquad n \geqslant 1,$$

aber

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Strikte Ungleichungen überleben einen Grenzübergang im Allgemeinen nicht, und Grenzwertungleichungen schließen immer auch den Fall der Gleichheit ein.

5.3 Einige wichtige Grenzwerte

10 **Lemma** *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Fall $q = 0$ ist trivial. Sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist

$$|q| = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

mit einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung $_{3.4}$ ist

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + n\varepsilon, \qquad n \geqslant 1.$$

Damit erhalten wir

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\varepsilon} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon}.$$

Da auf der rechten Seite eine Nullfolge steht, bildet aufgrund des Majorantenkriterium $_5$ auch q^n eine Nullfolge. ⟩⟩⟩⟩⟩

11 **Lemma** *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0.$$

Somit dominiert q^n jede Potenz von n, wenn $|q| < 1$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $q \neq 0$, und betrachte $a_n \coloneqq n^p |q|^n$. Für festes p folgt aus den Grenzwertsätzen $_7$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^p = 1.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p |q| = |q| < 1.$$

Wählen wir eine beliebige reelle Zahl r mit $|q| < r < 1$, so gibt es also ein $N \geqslant 1$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $0 < a_{n+1} < r a_n$ für alle $n \geqslant N$. Induktiv folgt daraus

$$0 < a_{N+n} < r^n a_N, \qquad n \geqslant 0.$$

Hier bildet (r^n) aufgrund des letzten Lemmas $_{10}$ eine Nullfolge. Also $_5$ bildet auch (a_n) eine Nullfolge. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Lemma** *Für jede reelle Zahl a gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät wächst somit schneller als jede Potenz. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Fixiere irgendein r mit $0 < r < 1$. Dann gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{|a|}{n} \leqslant r, \qquad n \geqslant N.$$

Für alle $n \geqslant N$ gilt dann

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a|}{k} = \prod_{k=1}^{N} \frac{|a|}{k} \prod_{k=N+1}^{n} \frac{|a|}{k} \leqslant |a|^N \prod_{k=N+1}^{n} r \leqslant |a|^N r^{n-N}.$$

Die rechte Seite bildet eine Nullfolge bezüglich n, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im nächsten Lemma antizipieren wir die Existenz und Monotonie der n-ten Wurzelfunktion auf den positiven reellen Zahlen ??.

13 **Lemma** *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, und daher 11

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0.$$

Also gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Dies ist äquivalent mit $n < (1+\varepsilon)^n$, oder

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da andererseits auch $1 \leqslant \sqrt[n]{n}$ für alle $n \geqslant 1$, folgt hieraus

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

5.4 Existenzsätze

Bisher gingen wir davon aus, dass wir den Grenzwert einer konvergenten Folge kennen – schließlich spielt dieser eine zentrale Rolle in der Definition ihrer Konvergenz. Tatsächlich sieht man jedoch vielen konvergenten Folgen *nicht an*, welchen Grenzwert sie haben. So ist die Folge der reellen Zahlen

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{n!}$$

konvergent 15, auch wenn wir ihren Grenzwert nicht kennen.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob man nur durch Betrachten einer Folge selbst auf deren Konvergenz und die Existenz eines Grenzwertes schließen kann. Am einfachsten ist diese Frage für *monotone* Folgen zu beantworten.

■ Monotone Folgen

Definition *Eine reelle Folge (a_n) heißt monoton steigend, falls*

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

für alle n gilt. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$a_n < a_{n+1}$$

für alle n gilt. Analog sind monoton fallend und streng monoton fallend definiert. Schließlich heißt eine Folge (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt. ⋊

Konvergiert eine Folge (a_n) *monoton* gegen ihren Grenzwert a, so schreibt man auch genauer $a_n \nearrow a$ für monoton steigende und $a_n \searrow a$ für monoton fallende Folgen.

14 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Eine monotone Folge (a_n) ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\lim a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

für monoton steigende Folgen. Für monoton fallende Folgen gilt entsprechend $\lim a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. ⋊

$\Rightarrow$ *Jede* konvergente Folge ist beschränkt [3].

$\Leftarrow$ Sei umgekehrt etwa (a_n) monoton steigend und beschränkt. Dann ist die Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt, und es existiert die reelle Zahl

$$a = \sup A < \infty.$$

Aufgrund des Approximationssatzes [2.12] existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a_N \in A$ mit $a - \varepsilon < a_N \leqslant a$. Aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) und der Definition von a als obere Schranke aller a_n gilt dann auch

$$a - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant a, \qquad n \geqslant N.$$

Das aber bedeutet, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt also $\lim a_n = a = \sup A$.

Bemerkung Die Existenz des Grenzwertes folgt somit aus der Existenz eines Supremums, und damit aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt der Satz *nicht* [A-5].

15 *Beispiel* Die Folge der Summen

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + .. + \frac{1}{n!}$$

ist offensichtlich streng monoton steigend. Außerdem ist zum Beispiel

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad k \geqslant 1.$$

Somit gilt mit $q = 1/2$ [3.13]

$$e_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \leqslant \frac{1}{1 - q} = 2.$$

Die Folge ist also beschränkt, und es existiert die *Eulersche Zahl*

$$\mathrm{e} \coloneqq \lim_{n \to \infty} e_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \eqqcolon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

wobei $\mathrm{e} \leqslant 3$ aufgrund unserer groben Abschätzung.

Teilfolgen

Nicht jede reelle Folge ist monoton. Man kann aber immer eine monotone *Teilfolge* auswählen, indem man nur einen Teil der Folgenglieder betrachtet und die übrigen ignoriert.

Definition *Ist $(a_n)_n$ eine Folge in einer Menge X und $(n_k)_k$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, so heißt*

$$(a_{n_k})_k = (a_{n_1}, a_{n_2}, ..)$$

eine Teilfolge von (a_n). Die Folge $(n_k)_k$ selbst heißt eine Auswahlfolge. ⋊

Eine Teilfolge ist also die Komposition einer Folge $a\colon \mathbb{N} \to X$ mit einer streng monoton steigenden Folge $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, also die Folge

$$a \circ \varphi = (a_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, ..).$$

Beispiele A. $(1/n^2)$ und (2^{-n}) sind Teilfolgen von $(1/n)$.

B. Die Folge $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, ..)$ besitzt unter anderem die beiden Teilfolgen $(0, 0, 0, ..)$ und $(1, 2, 3, ..)$.

C. Die Folge $((-1)^n)$ besitzt die beiden Teilfolgen

$$(1, 1, ..), \qquad (-1, -1, ..),$$

und noch viele andere, zum Beispiel $((-1)^{k^3})$ oder $((-1)^{k!})$.

D. Jede Folge besitzt übrigens überabzählbar viele Teilfolgen A-22.

Jede Teilfolge einer *konvergenten* Folge ist offensichtlich ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Interessanter ist die Frage, ob *jede Folge* eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Antwort gibt der Satz von Bolzano-Weierstraß 17, der auf folgender Beobachtung basiert.

16 **Lemma** *Jede reelle Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Menge

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant a_m \text{ für alle } m \geqslant n \}.$$

Ist A *unendlich*, so bildet eine streng monotone Abzählung von A eine Auswahlfolge (n_k) mit der Eigenschaft, dass

$$a_{n_k} \geqslant a_{n_{k+1}}.$$

Also ist (a_{n_k}) monoton *fallend*. Ist dagegen A *endlich*, so ist $\sup A < \infty$, und das gilt auch, wenn A leer ist. Zu jedem $n > \sup A$ existiert dann ein $m > n$ mit

$$a_n < a_m,$$

denn andernfalls wäre $n \in A$. Auf diese Weise können wir induktiv eine Auswahlfolge (n_k) konstruieren, so dass

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}.$$

Wir erhalten somit eine streng monoton *steigende* Teilfolge (a_{n_k}). ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Satz behauptet *nicht*, dass man immer je eine monoton fallende und eine steigende Teilfolge auswählen kann. Ist zum Beispiel die Ausgangsfolge monoton steigend, so ist auch jede Teilfolge monoton steigend. ⊸

17 **Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Mit dem vorangehenden Lemma können wir aus jeder Folge eine monotone Teilfolge auswählen. Diese ist beschränkt, wenn die Originalfolge beschränkt ist. Also ist sie mit dem Satz von der monotonen Konvergenz $_{14}$ konvergent. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiele* a. $((-1)^n)$ besitzt unter anderem die konvergenten Teilfolgen $(1,1,..)$ und $(-1,-1,..)$.

b. Jede Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Es gibt sogar zu jeder reellen Zahl $x \in [0,1]$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

c. Die monotone Folge $(1,2,3,..)$ besitzt *keine* konvergente Teilfolge. Sie ist aber auch nicht beschränkt. ◃

▪ Cauchyfolgen

Wann aber ist eine beschränkte Folge auch ohne Auswahl einer Teilfolge konvergent? Moit anderen Worten, wann kann man von der Konvergenz einer Teilfolge auf die Konvergenz der gesamten Folge schließen? Die Untersuchung dieser Frage führt zum Begriff der *Cauchyfolge*.

Definition *Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \qquad m,n \geqslant N. \quad ⋊$$

In einer Cauchyfolge wird der Abstand *aller Folgenglieder untereinander* also beliebig klein, wenn deren Indizes nur groß genug sind.

18 ▹ *Beispiele* a. $((-1)^n)$ bildet *keine* Cauchyfolge, denn

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2, \qquad n \geqslant 1.$$

b. Für die Summen e_n von Beispiel 15 gilt für alle $m \geqslant n \geqslant 1$

$$|e_m - e_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da dies für alle $m \geqslant n$ gilt und die rechte Seite eine Nullfolge in n bildet, ist (e_n) eine Cauchyfolge. ◃

Weitere Beispiele für Cauchyfolgen sind an dieser Stelle nicht nötig. Denn es gilt ganz allgemein:

19 **Satz** *Jede konvergente reelle Folge ist eine Cauchyfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N.$$

Für alle $m, n \geqslant N$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon.$$

Somit bildet (a_n) eine Cauchyfolge. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es *reicht nicht*, nur die Abstände $|a_{n+1} - a_n|$ zu betrachten. So bilden die Summen

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n}$$

eine streng monoton steigende Folge, und es gilt

$$|h_{n+1} - h_n| = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Trotzdem ist diese Folge divergent $_{6.4}$. ⊸

Uns interessiert natürlich vor allem die Frage, ob auch umgekehrt eine Cauchyfolge immer konvergiert. Dazu zunächst zwei Teilergebnisse.

20 **Lemma 1** *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies wird genauso bewiesen wie der Beschränktheitssatz $_3$. Nur wählt man statt des Grenzwertes a zum Beispiel das Folgenglied a_N. ⟩⟩⟩⟩⟩

21 **Lemma 2** *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist auch die Gesamtfolge konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) eine Cauchfolge, (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, und a ihr Grenzwert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Cauchyfolgen-Eigenschaft ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2, \qquad m, n \geqslant N.$$

Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge existiert außerdem ein $K \geqslant 1$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2, \qquad k \geqslant K.$$

Wählen wir ein $k \geqslant K$ mit $n_k \geqslant N$, so folgt

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Konvergenz von (a_n) gegen a. ⟫⟫⟫

Zusammen mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass folgt nun das Konvergenzkriterium von Cauchy, das ohne Kenntnis des Grenzwertes auskommt.

22 **Cauchykriterium** *Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bildet.* ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Siehe oben [19].

$\Leftarrow$ Eine reelle Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt [20]. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß [17] besitzt sie also eine konvergente Teilfolge. Dann [21] ist aber auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. ⟫⟫⟫

23 ▹ *Beispiel* Die durch

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - .. + \frac{(-1)^n}{n!}$$

definierte Folge (d_n) ist nicht monoton, doch für $m > n \geqslant 1$ gilt

$$|d_m - d_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

mit derselben Abschätzung wie in Beispiel 18. Also ist auch (d_n) eine Cauchyfolge und damit konvergent. Übrigens gilt

$$\lim d_n = \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\lim e_n}.$$

Dies ergibt sich aus der Potenzreihendarstellung der Exponenzialfunktion. ◃

5.5 Häufungswerte

Es gibt Folgen, die nicht konvergieren, aber trotzdem einem oder mehreren Punkten immer wieder ›beliebig nahe‹ kommen. Statt von Grenzwerten spricht man in diesen Fällen von *Häufungswerten*.

Definition *Eine reelle Zahl a heißt Häufungswert einer reellen Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \geqslant 1$ ein $n \geqslant N$ gibt, so dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad ⋊$$

Da es zu *jedem* N ein solches $n \geqslant N$ gibt, ist die Menge $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\}$ *unbeschränkt.* Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher *unendlich viele* n mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < \varepsilon$. Nicht verlangt wird dagegen, dass dies für *alle hinreichend großen* n gilt.

▹ *Beispiele* A. $(1/n)$ hat 0 als Häufungswert und als Grenzwert.
B. $((-1)^n)$ hat die zwei Häufungswerte 1 und -1.
C. (n) hat keinen Häufungswert.
D. $(\sin(n\pi/2 + 1/n))$ hat die drei Häufungswerte -1, 0 und 1. ◃

Den Unterschied zwischen Grenz- und Häufungswert verdeutlicht folgende *Sprachregelung.* Eine Eigenschaft A gilt für *unendlich viele* n, wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ unbeschränkt ist. Sie gilt *für alle bis auf endlich viele* n, oder kurz für *fast alle* n, wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ endlich und damit beschränkt ist.

▹ *Beispiele* A. Fast alle Primzahlen sind ungerade.
B. Unendlich viele natürlichen Zahlen sind ungerade, aber nicht fast alle.
C. Fast alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar. ◃

Schließlich führen wir noch den grundlegenden Begriff der *Umgebung* ein. Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so nennen wir das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung* von a. Sie besteht aus allen reellen Zahlen x, deren Abstand von a strikt kleiner als ε ist. — Mit diesen Begriffen können wir Häufungs- und Grenzwerte wie folgt charakterisieren.

24 **Charakterisierung von Häufungs- und Grenzwert** *Eine reelle Zahl a ist Häufungswert einer reellen Folge (a_n) genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Sie ist ihr Grenzwert, wenn in jeder ε-Umgebung sogar fast alle Folgengleider liegen.* ⋊

Jeder Grenzwert ist somit ein Häufungswert. Aber nicht jeder Häufungswert ist ein Grenzwert. Eine Folge kann keinen, einen, oder viele Häufungswerte haben. Selbst wenn sie nur einen Häufungswert hat, muss dieser kein Grenzwert sein.

Beispiele A. $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ besitzt genau zwei Häufungswerte, 1 und -1.

B. $(1, 2, 3, ..)$ besitzt keinen Häufungswert.

C. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, ..)$ besitzt 0 als einzigen Häufungswert, ist aber nicht konvergent.

Zwischen Häufungswert und Teilfolge besteht folgender Zusammenhang, der ebenfalls als Charakterisierung von Häufungswerten dienen kann.

25 **Satz** *Eine reelle Folge (a_n) besitzt a als Häufungswert genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.*

$\Leftarrow$ Gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a$, so liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Teilfolge. Damit liegen in dieser Umgebung aber auch unendlich viele Glieder der Originalfolge. Also ist a ein Häufungswert dieser Folge.

$\Rightarrow$ Sei umgekehrt a ein Häufungswert der Folge (a_n). Sei (ε_n) eine beliebige monoton fallende Nullfolge, zum Beispiel $\varepsilon_n = 1/2^n$. Dann definieren wir rekursiv eine Auswahlfolge (n_k) durch $n_1 \coloneqq 1$ und

$$n_k \coloneqq \min\{n > n_{k-1} : a_n \in U_{\varepsilon_k}(a)\}, \qquad k \geqslant 2.$$

Da a ein Häufungswert ist, sind die betrachteten Mengen nicht leer und besitzen somit ein Minimum. Offensichtlich gilt dann $n_k > n_{k-1}$. [2]

Wir behaupten, dass $a_{n_k} \to a$. Nun, da (ε_n) eine positive Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geqslant 1$ so, dass

$$0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \qquad k \geqslant K.$$

Aufgrund der Definition der n_k gilt dann auch

$$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a) \subset U_\varepsilon(a), \qquad k \geqslant K.$$

In jeder ε-Umgebung von a liegen somit fast alle Glieder der Teilfolge (a_{n_k}). Also gilt $a_{n_k} \to a$.

Den Satz von Bolzano-Weierstraß können wir damit auch so formulieren.

26 **Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungswert.*

Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge [17]. Deren Grenzwert ist damit auch Häufungswert der Gesamtfolge.

[2] Statt des Minimums könnten wir auch irgendein Element dieser Menge wählen. Das daran anschließende Argument bleibt davon unberührt.

5.6 Uneigentliche Grenzwerte

Neben den klassisch konvergenten Folgen hat man es oft auch mit Folgen zu tun, die in gewisser Weise gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Dieses Verhalten können wir präzisieren, indem wir auch für diese Fälle geeignete Umgebungen betrachten. Dazu definieren wir für alle $\varepsilon > 0$ die offenen Intervalle

$$U_\varepsilon(\infty) \coloneqq (1/\varepsilon, \infty), \qquad U_\varepsilon(-\infty) \coloneqq (-\infty, -1/\varepsilon)$$

als *ε-Umgebungen* von ∞ respektive $-\infty$. Es gilt dann beispielsweise

$$U_\delta(\infty) \subset U_\varepsilon(\infty), \qquad 0 < \delta < \varepsilon.$$

Die Umgebungen werden also ›kleiner‹, wenn ε kleiner wird – wie es sich für Umgebungen gehört. Man beachte, dass diese Umgebungen die Punkte ∞ respektive $-\infty$ *nicht enthalten.*

Definition *Eine reelle Folge (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞, wenn in jeder ε-Umgebung von ∞ fast alle Folgenglieder liegen. Man nennt dann ∞ den uneigentlichen Grenzwert einer solchen Folge und schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Entsprechendes gilt für die uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$. ⋊

Auch im Fall der uneigentlichen Konvergenz ist der Grenzwert *eindeutig bestimmt.* Aber natürlich ist eine uneigentlich konvergente Folge *nicht beschränkt.*

Notiz *Es gilt $a_n \to \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $N \geqslant 1$ existiert, so dass*

$$a_n > M, \qquad n \geqslant N.$$

Jede beliebige Schranke wird also von fast allen Folgengliedern übertroffen. ⋊

▷ *Beispiel* Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Denn sei $M > 0$. Wegen $M^n/n! \to 0$ 12 gibt es ein N, so dass

$$\frac{M^n}{n!} < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Für $n \geqslant N$ ist also $n! > M^n$ und damit $\sqrt[n]{n!} > M$. ◁

▪ Grenzwertsätze

Die Grenzwertgleichungen 7 verallgemeinern sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen auf uneigentliche Grenzwerte. Um diese handlich zu formulieren, schreiben wir $a_n \succ c$ mit einer reellen Konstanten c, wenn $a_n > c$ für fast alle n gilt.

27 **Satz** *Für reelle Folgen (a_n) und (b_n) gilt:*

(i) $|a_n| \to \infty \quad\Rightarrow\quad a_n^{-1} \to 0.$

(ii) $a_n \to 0 \wedge a_n \succ 0 \quad\Rightarrow\quad a_n^{-1} \to \infty.$

(iii) $a_n \to \infty \wedge b_n \succ c \quad\Rightarrow\quad a_n + b_n \to \infty.$

(iv) $a_n \to \infty \wedge b_n \succ c > 0 \quad\Rightarrow\quad a_n b_n \to \infty.$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei jeweils $\varepsilon > 0$. (i) Gilt $|a_n| > 1/\varepsilon$ für fast alle n, so gilt auch

$$|a_n^{-1}| = |a_n|^{-1} < \varepsilon$$

für fast alle n. Also bildet (a_n^{-1}) eine Nullfolge.

(ii) Nach Voraussetzung sind fast alle Folgenglieder a_n positiv. Da (a_n) eine Nullfolge bildet, gilt $0 < a_n < \varepsilon$ für fast alle n. Dann gilt aber auch

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n},$$

also $a_n^{-1} \in U_\varepsilon(\infty)$ für fast alle n. Somit gilt $a_n^{-1} \to \infty$.

(iii) Wegen $a_n \to \infty$ gilt $a_n > 1/\varepsilon - c$ für fast alle n. Also gilt auch

$$a_n + b_n > \frac{1}{\varepsilon} - c + b_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

für fast alle n. Fast alle Glieder der Folge $(a_n + b_n)$ liegen somit in $U_\varepsilon(\infty)$, was zu zeigen war.

(iv) Für fast alle n gilt $a_n > \varepsilon/c$. Mit $b_n > c > 0$ für fast alle n folgt

$$a_n b_n > a_n c > 1/\varepsilon$$

für fast alle n. Also konvergiert auch $(a_n b_n)$ uneigentlich gegen ∞. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Aussagen werden *falsch*, wenn man die $\succ$-Bedingungen fallen lässt A-32.

Interpretieren wir die Symbole $\pm\infty$ als Grenzwerte uneigentlich konvergenter Folgen und identifizieren eine reelle Zahl x mit einer konstanten Folge, so rechtfertigt dieser Satz die folgenden Vereinbarungen für das Rechnen mit diesen Symbolen. Für reelle x *definieren* wir demnach

$$\infty + x \coloneqq \infty, \qquad \frac{x}{\infty} = 0, \qquad \infty \cdot x \coloneqq \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Die Konventionen für $-\infty$ erhält man durch Ersetzen von ∞ durch $-\infty$.

Nicht erklärt sind dagegen die Ausdrücke

$$\infty - \infty, \qquad \infty \cdot 0, \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ihnen lässt sich kein Wert in sinnvoller Weise zuordnen, denn mit geeigneten Folgen kann man *jeden Wert* als Grenzwert realisieren $_{\text{A-36}}$.

Wir erweitern jetzt noch drei Existenzsätze auf uneigentliche Grenzwerte.

28 **Erweiterter Approximationssatz** *In jeder nichtleeren Menge A reeller Zahlen existiert eine Folge (a_n), die gegen $\sup A$ konvergiert. Entsprechendes gilt für $\inf A$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \sup A$ und (ε_n) eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen. Aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ existiert zu jedem n ein Element

$$a_n \in U_{\varepsilon_n}(a) \cap A.$$

Dies gilt sowohl für $a < \infty$ als auch für $a = \infty$. Die so gewonnene Folge (a_n) liegt in A, und genau wie zuvor $_{25}$ zeigt man, dass sie gegen a konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

29 **Erweiterter Satz von der monotonen Konvergenz** *Jede monotone Folge konvergiert gegen einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist die Folge beschränkt, so kommt der Satz von der monotonen Konvergenz $_{14}$ zur Anwendung. Andernfalls ist die Folge unbeschränkt. Wegen der Monotonie hat sie dann den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$. ⟩⟩⟩⟩⟩

30 **Erweiterter Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede reelle Folge besitzt eine eigentlich oder uneigentlich konvergente Teilfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies folgt mit dem Satz von der Existenz monotoner Teilfolgen $_{16}$ und dem erweiterten Satz von der monotonen Konvergenz. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiele* A. $(n!^{n!})$ konvergiert uneigentlich gegen ∞.

B. $(0,1,0,2,0,3,..)$ besitzt die konvergente Teilfolge $(0,0,..)$ und die uneigentlich konvergente Teilfolge $(1,2,3,..)$.

C. $((-1)^n n)$ besitzt die uneigentlich konvergenten Teilfolgen $(2,4,6,..)$ und $(-1,-3,-5,..)$. ◃

5.7 Normierte Räume und Banachräume

Bisher haben wir Folgen in $\mathbb{R}$ und deren Konvergenz betrachtet. Aber natürlich wollen wir später auch Folgen in $\mathbb{R}^n$ und vielen anderen Räumen betrachten. Um auch dort Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert zu definieren, verallgemeinern wir den *Betrag* einer reellen Zahl zur *Norm* eines Vektors in einem *reellen Vektorraum*. Zunächst definieren wir den Begriff des *reellen Vektorraums*.

Definition *Ein reeller Vektorraum E ist eine additive Gruppe zusammen mit einer Verknüpfung*

$$\mathbb{R} \times E \to E, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

genannt skalare Multiplikation, mit folgenden Eigenschaften für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E$:

(V-1) $1v = v$,
(V-2) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
(V-3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,
(V-4) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$. ⋊

Additive Gruppe bedeutet hierbei, dass für die Addition in E die Axiome (A1-3) 2.1 gelten. — Die gesamte Spannweite des Begriffs des Vektorraums wird im Laufe der Zeit klar werden. Im Augenblick reichen uns folgende Beispiele.

▷ A. Das Standardbeispiel ist der $\mathbb{R}^n$ mit der Addition

$$u + v = (u_1, .., u_n) + (v_1, .., v_n) \coloneqq (u_1 + v_1, .., u_n + v_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda v = \lambda(v_1, .., v_n) \coloneqq (\lambda v_1, .., \lambda v_n).$$

Diese hat alle geforderten Eigenschaften.

B. Insbesondere kann auch $\mathbb{R}$ als reeller Vektorraum aufgefasst werden. Allerdings ignoriert man dabei die Körperstruktur.

C. Der Raum $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition komplexer Zahlen und der Multiplikation mit *reellen Zahlen* ist ein reeller Vekorraum. Man kann ihn mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren. ◁

Die Untersuchung von Vektorräumen ist ein wichtiges Thema der linearen Algebra. Für uns reicht im Moment die Definition, das Standardbeispiel und die Tatsache, dass man auf solchen Räumen das Konzept des Betrages zu dem der *Norm* verallgemeinern kann.

Definition *Eine Norm auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:
(N-1) *Definitheit:* $\|x\| \geqslant 0$, *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(N-2) *Positive Homogenität:* $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
(N-3) *Dreiecksungleichung:* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ nennt man einen normierten Vektorraum oder kurz normierten Raum. ⋊

Die Bedingungen (N-1)–(N-3) abstrahieren die wesentlichen Eigenschaften der Betragsfunktion, die eine Längenfunktion auf einem beliebigen Vektorraum aufweisen sollte. Zum Beispiel gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung.

31 **Lemma** *Für jede Norm gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\|x - y\| \geqslant \big| \|x\| - \|y\| \big| . \quad ⋊$$

⟪⟪ Wie bei die Betragsfunktion $_{2.8}$, nur mit $\|\cdot\|$ anstelle von $|\cdot|$. ⟫⟫

▷ *Beispiele* A. Auf $\mathbb{R}$ wie auf $\mathbb{C}$ definiert der Betrag $|\cdot|$ eine Norm, die sogenannte *Betragsnorm*. Die Normeigenschaften haben wir bereits verifiziert $_{2.7\ \&\ 4.3}$.

B. Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$\|x\|_1 := |x_1| + .. + |x_n|$$

die sogenannte *Summennorm* und durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, .., |x_n|\}$$

die sogenannte *Maximumsnorm* definiert. Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren.

C. Die *euklidische* oder *natürliche Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + .. + |x_n|^2} .$$

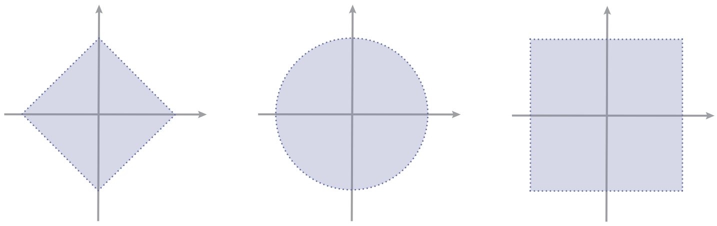
Nach dem Satz des Pythagoras misst sie die ›natürliche‹ Länge des Vektors x. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist allerdings nicht offensichtlich und wird gleich bewiesen werden.

D. Tatsächlich wird für jedes $p \geqslant 1$ durch

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + .. + |x_n|^p}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Das wird uns aber erst später beschäftigen. ◁

Abb 2 Einheitskugeln bezüglich verschiedener Normen



▪ Skalarprodukte

Um auch den euklidischen Abstand als Norm zu erkennen, benötigen wir noch das Konzept des *Skalarproduktes*.

Definition *Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
(s-1) *Definitheit:* $\langle x,x \rangle \geqslant 0$, *und* $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(s-2) *Symmetrie:* $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$,
(s-3) *Linearität:* $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \mu \langle y,z \rangle$. ⋊

Wegen der Symmetrie ist ein reelles Skalarprodukt auch linear im zweiten Argument, also

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \mu \langle x,z \rangle .$$

Man spricht daher auch von einer *bilinearen Form* auf E. Für diese gilt übrigens $\langle x,0 \rangle = 0$ für alle $x \in E$.

Für Skalarprodukte gilt folgende grundlegende Ungleichung, die man meist nur *Schwarzsche Ungleichung* nennt.

32 **Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung** *Für ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E gilt*

$$\langle x,y \rangle^2 \leqslant \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle , \qquad x, y \in E.$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für jedes Skalarprodukt und jede reelle Zahl λ gilt

$$0 \leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle .$$

Da die Behauptung offensichtlich für $y = 0$ gilt, dürfen wir $y \neq 0$ annehmen. Dann ist $\langle y, y \rangle > 0$, und wir können

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

wählen. Einsetzen in die vorangehende Ungleichung ergibt

$$0 \leqslant \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}.$$

Multiplikation mit $\langle y, y \rangle > 0$ ergibt die Behauptung

$$0 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 .$$

Angenommen, es gilt sogar Gleichheit. Ist $y = 0$, so sind x und y ohnehin linear abhängig. Ist dagegen $y \neq 0$, so ergibt dieselbe Wahl von λ und dieselbe Rechnung in umgekehrter Richtung die Identität

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0.$$

Also ist $x + \lambda y = 0$, und x und y sind linear abhängig. ⟩⟩⟩⟩⟩

33 **Satz** *Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum E, so definiert*

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf E. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Definitheit ist leicht zu verifizieren. Positive Homogenität folgt mit

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\| .$$

Ferner ist aufgrund der Cauchyungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \, \|y\| .$$

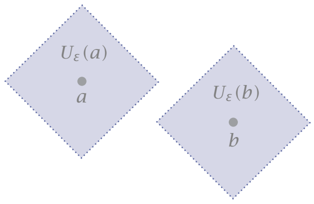
Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2 \|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt die Dreiecksungleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 3

Trennende Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$



⊳ Das *Standardskalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + .. + x_n y_n .$$

Somit ist

$$\langle x, x \rangle = |x_1|^2 + .. + |x_n|^2 .$$

Die hiervon induzierte Norm ist die *euklidische Norm* $\|\cdot\|_2$, die hiermit 33 auch tatsächlich als *Norm* erkannt ist. ⊲

Bemerkung Nicht jede Norm wird durch ein Skalarprodukt gegeben. Dies ist nur dann der Fall, wenn die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

erfüllt ist A-42 . ⊸

Wir haben damit erste Beispiele von normierten Räumen. Viele weitere werden folgen. Eine zentrale Rolle spielen sie zum Beispiel in der Funktionalanalysis, wo man verschiedenste Räume von Funktionen und Abbildungen studiert.

▪ Konvergenz

Um Konvergenz für Folgen in einem normierten Vektorraum E zu definieren, genügt es nun, den Begriff der Umgebung entsprechend zu verallgemeinern. Die *ε-Umgebungen* eines Punktes a sind hier die Mengen

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{ x \in E : \ \|x - a\| < \varepsilon \} .$$

Sie werden auch *offene ε-Kugeln* um a genannt und mit $B_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Allerdings sehen diese Kugeln nur im Fall der euklidischen Norm wie handelsübliche Kugeln aus – siehe Abbildung 2. Dies ist jedoch für mathematische Zwecke unwesentlich. Wichtig ist, dass es um zwei verschiedene Punkte eines normierten Raumes immer ε-Umgebungen gibt, die *disjunkt* sind. Man sagt, man kann verschiedene Punkte durch offene Umgebungen *trennen*.

34 **Trennungseigenschaft** *Zu je zwei Punkten $a \neq b$ eines normierten Raumes gibt es immer ein $\varepsilon > 0$ derart, dass*

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Man nehme $\varepsilon = \|b-a\|/2 > 0$ und führe die Annahme, dass die entsprechenden Umgebungen einen Punkt gemeinsam haben, zum Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Definition einer konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum ist nun *wörtlich* dieselbe wie im reellen Fall $_{24}$.

Definition und Satz *Eine Folge (a_n) in einem normierten Raum E heißt konvergent mit Grenzwert a, falls jede ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder enthält. Dieser Grenzwert a ist eindeutig bestimmt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem $b \neq a$ existiert aufgrund des Trennungssatzes $_{34}$ ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε-Umgebungen um a und b disjunkt sind. Da fast alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen, können nur noch höchstens endlich viele in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Also kann b kein Grenzwert der Folge sein. ⟩⟩⟩⟩⟩

35 **Notiz** *In einem normierten Raum konvergiert eine Folge (a_n) genau dann gegen den Punkt a, wenn $(\|a_n - a\|)$ eine reelle Nullfolge bildet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ergibt sich aus

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \Leftrightarrow \quad \|a_n - a\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \|a_n - a\| \in U_\varepsilon(0),$$

wobei $U_\varepsilon(0)$ die ε-Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ meint. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Begriff des Häufungswertes wird entsprechend definiert. In allgemeinen normierten Räumen werden wir ihn allerdings nicht benötigen. ⊸

■ Grenzwertsätze

Auch die Grenzwertsätze verallgemeinern sich von reellen Folgen direkt auf Folgen in normierten Räumen. Wir fassen uns daher kurz.

36 **Satz** *Gilt $a_n \to a$ in einem normierten Vektorraum E, so gilt auch*

$$\|a_n\| \to \|a\|$$

in $\mathbb{R}$. Jede konvergente Folge ist daher auch beschränkt – das heißt, es gibt ein $M \geqslant 0$, so dass $\|a_n\| \leqslant M$ für alle n. ⋊

⟪ Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$\big|\, \|a_n\| - \|a\| \,\big| \leqslant \|a_n - a\| \to 0.$$

Also konvergiert $(\|a_n\|)$ gegen $\|a\|$. Insbesondere ist diese Folge beschränkt. ⟫

37 **Grenzwertgleichung für Linearkombinationen** *Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum, so ist auch jede Linearkombination $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent, und es gilt*

$$\lim (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda (\lim a_n) + \mu (\lim b_n). \qquad \rtimes$$

⟪ Mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda a + \mu b)\| &= \|\lambda (a_n - a) - \mu (b_n - b)\| \\ &\leqslant |\lambda|\, \|a_n - a\| + |\mu|\, \|b_n - b\|. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ steht auf der rechten Seite eine Nullfolge $_{35}$. Also bildet auch die linke Seite eine Nullfolge $_{5}$, und die Behauptung folgt $_{35}$. ⟫

▪ Konvergenz in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{C}$

Eine Folge (x_n) im $\mathbb{R}^m$ heißt auch *vektorwertige Folge*. Hier ist jedes Folgenglied ein m-Tupel, also

$$x_n = (x_{n,1}, .., x_{n,m}).$$

Ein Grenzwert einer solchen Folge ist dann ebenfalls ein m-Tupel $a = (a_1, .., a_m)$.

38 **Satz** *Eine vektorwertige Folge (x_n) konvergiert gegen a bezüglich der Summen-, euklidischen und Maximumsnorm genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert, also gilt:*

$$x_{n,i} \to a_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \qquad \rtimes$$

Zunächst eine Ungleichung, die öfter benötigt wird.

39 **Lemma** *Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt*

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant m\, \|x\|_\infty. \qquad \rtimes$$

⟪ Es ist ja

$$\begin{aligned} \big(\max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\big)^2 &\leqslant |x_1|^2 + .. + |x_m|^2 \\ &\leqslant (|x_1| + .. + |x_m|)^2 \leqslant \big(m \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|\big)^2. \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2 \leqslant \|x\|_1^2 \leqslant m^2\, \|x\|_\infty^2$. Wurzelziehen ergibt die Behauptung. ⟫

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes* Aufgrund des letzten Lemmas ist

$$\|x_n - a\|_\infty \leqslant \|x_n - a\|_2 \leqslant \|x_n - a\|_1 \leqslant m\,\|x_n - a\|_\infty .$$

Bildet also eine dieser Normen eine Nullfolge, dann auch jede andere. Konvergenz in jeder Komponente ist gleichbedeutend mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, woraus die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Komplexe Folgen – also Folgen in $\mathbb{C}$ – können als Spezialfall dieses Satzes betrachtet werden, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteile ihrer Folgenglieder konvergieren $_{\text{A-41}}$. — Schließlich gilt auch der

40 **Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}^m$** *Jede beschränkte vektorwertige Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^m$. Sei $x_n = (x_{n,1}, .., x_{n,m})$. Dann ist auch jede Komponentenfolge

$$(x_{n,i})_n, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen $_{17}$ existiert somit eine erste Teilfolge $(x_{n'_k})$, deren erste Koordinate konvergiert:

$$x_{n'_k,1} \to a_1 .$$

Aus dieser können wir eine zweite Teilfolge $(x_{n''_k})$ auswählen, wo auch die zweite Koordinate konvergiert:

$$x_{n''_k,2} \to a_2 .$$

Diesen Auswahlverfahren können wir fortsetzen, bis wir eine letzte Teilfolge $(x_{n'''_k})$ erhalten, wo auch die letzte Koordinate konvergiert:

$$x_{n'''_k,m} \to a_m .$$

Somit konvergiert jede Komponente der Teilfolge $(x_{n'''_k})$. Damit $_{38}$ konvergiert diese Teilfolge aber auch in der euklidischen Norm gegen $a = (a_1, .., a_m)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Cauchyfolgen und Banachräume

Cauchyfolgen in normierten Räumen sind wie reelle Cauchyfolgen definiert.

Definition *Eine Folge (a_n) in einem normierten Vektorraum heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \qquad n, m \geqslant N. \quad ⋊$$

Jede konvergente Folge ist wieder eine Cauchyfolge, und Lemma 1 [20] und 2 [21] für reelle Cauchyfolgen gelten genauso in normierten Räumen. In den Beweisen muss man lediglich den Betrag durch die jeweilige Norm ersetzen:

41 **Satz** *In einem normierten Vektorraum gilt:*

(1) *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*
(2) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*
(3) *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert.* ⋊

Der große Unterschied ist jedoch, dass das Cauchykriterium im Allgemeinen *nicht mehr gilt:* es gibt normierte Vektorräume, in denen Cauchyfolgen *keinen* Grenzwert haben. Ein Beispiel dafür geben wir im nächsten Abschnitt.

Vielmehr ist dies eine Eigenschaft, die eine wichtige Klasse von normierten Räume *auszeichnet*, während sie anderen Räumen fehlt. Daher erhalten solche Räume auch einen eigenen Namen.

Definition *Ein normierter Vektorraum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in ihm einen Grenzwert besitzt. Ein vollständiger, normierter Vektorraum wird Banachraum genannt.* ⋊

Die einfachsten Beispiele von Banachräumen kennen wir bereits.

42 **Satz** *Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Betragsnorm sowie $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen, Summen- oder Maximumsnorm sind vollständig, also Banachräume.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Da in den genannten Räumen der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, besitzt jede Cauchyfolge auch eine konvergente Teilfolge. Dann ist aber auch die Cauchyfolge selbst konvergent. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Wir werden in Abschnitt **??** sehen, dass der $\mathbb{R}^n$ mit *jeder* Norm vollständig ist, da dort alle Normen äquivalent sind. ⊸

▹▸ *Noch ein Beispiel* Sei X eine beliebige nichtleere Menge, und für eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ sei

$$\|f\|_X \coloneqq \sup \{ |f(x)| : x \in X \}.$$

Auf dem Raum der beschränkten reellen Funktionen auf X,

$$B(X) = \{ f: X \to \mathbb{R} : \|f\|_X < \infty \},$$

ist dies eine Norm, und $(B(X), \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum [A-45]. ◂◃

5.8 Der Folgenraum c

Wir geben ein Beispiel eines vollständigen unendlich-dimensionalen Vektorraumes, sowie eines darin enthaltenen nicht-vollständigen Unterraums. Diese Resultate werden wir später nicht benötigen, der Abschnitt kann also beim ersten Lesen übersprungen werden.

Wir betrachten den Raum c aller konvergenten reellen Folgen,

$$c := \{\mathfrak{a} = (a_n)_{n \geqslant 1} : (a_n) \text{ ist reell und konvergent}\}.$$

43 **Lemma** *Der Raum c ist ein reeller Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation von Folgen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Linearkombination $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ zweier Elemente in c ist erklärt durch

$$(\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b})_n = \lambda a_n + \mu b_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Aus dem Satz über Grenzwertgleichungen $_7$ folgt, das $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ ebenfalls konvergiert, also Element von c ist. Somit ist c ein reeller Vektorraum. ⟩⟩⟩⟩⟩

44 **Lemma** *Mit der Supremumsnorm*

$$\|\mathfrak{a}\| := \sup_{n \geqslant 1} |a_n|$$

wird c zu einem normierten Vektorraum. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Da jede konvergente Folge beschränkt ist $_{20}$, ist $\|\cdot\|$ eine Abbildung von c nach $\mathbb{R}$. Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren. So ist

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\| &= \sup_{n \geqslant 1} |a_n + b_n| \\ &\leqslant \sup_{n \geqslant 1} (|a_n| + |b_n|) \\ &\leqslant \sup_{n \geqslant 1} |a_n| + \sup_{n \geqslant 1} |b_n| = \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\|.\end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

45 **Satz** *Der normierte Raum $(c, \|\cdot\|)$ ist vollständig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $(\mathfrak{a}_m)_{m \geqslant 1}$ eine Cauchyfolge in c mit Gliedern $\mathfrak{a}_m = (a_{m,n})_{n \geqslant 1}$. Dann ist auch für jedes $n \geqslant 1$ die Komponentenfolge $(a_{m,n})_{m \geqslant 1}$ eine reelle Cauchyfolge, denn

$$|a_{k,n} - a_{l,n}| \leqslant \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_l\|.$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existieren also die Grenzwerte

$$b_n = \lim_{m \to \infty} a_{m,n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Aus diesen bilden wir die Folge $\mathfrak{b} = (b_n)_{n\geqslant 1}$ und zeigen, dass $\mathfrak{b}$ ebenfalls konvergiert und damit zu c gehört, und dass $\mathfrak{a}_m \to \mathfrak{b}$ in der Supremumsnorm.

Da $(\mathfrak{a}_m)_{m\geqslant 1}$ eine Cauchyfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geqslant 1$, so dass $\|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_l\| < \varepsilon$ für $k, l \geqslant K$. Also gilt für alle $n \geqslant 1$

$$|a_{k,n} - a_{l,n}| \leqslant \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_l\| < \varepsilon, \qquad k, l \geqslant K.$$

Wegen $a_{l,n} \to b_n$ für jedes $n \geqslant 1$ folgt hieraus durch Grenzwertübergang

$$|a_{k,n} - b_n| \leqslant \varepsilon, \qquad k \geqslant K, \quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Außerdem existiert für die konvergente Folge $\mathfrak{a}_K$ zu diesem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ mit

$$|a_{K,n} - a_{K,m}| < \varepsilon, \qquad n, m \geqslant N.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt dann für $n, m \geqslant N$

$$|b_n - b_m| \leqslant |b_n - a_{K,n}| + |a_{K,n} - a_{K,m}| + |a_{K,m} - b_m| < 3\varepsilon.$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geqslant 1$ existiert, ist $\mathfrak{b}$ eine Cauchyfolge, somit konvergent und Element von c. Aus (1) folgt außerdem

$$\|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{b}\| \leqslant \varepsilon, \qquad k \geqslant K.$$

Somit konvergiert $(\mathfrak{a}_m)$ in der Supremumsnorm gegen $\mathfrak{b}$. ⟫⟫⟫

Die Grenzwertabbildung

$$L\colon\ c \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{a} = (a_n) \mapsto L\mathfrak{a} = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

die jeder Folge in c ihren Grenzwert zuordnet, definiert auf c eine lineare Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$|L\mathfrak{a}| = |\lim a_n| \leqslant \sup |a_n| = \|\mathfrak{a}\|.$$

Ihr Kern ist der Raum aller Nullfolgen,

$$c_0 \coloneqq L^{-1}\{0\} = \{\mathfrak{a} = (a_n) \in c : \ \lim a_n = 0\}.$$

Dieser Raum ist also ebenfalls ein Vektorraum.

46 **Satz** *Der Unterraum c_0 aller Nullfolgen in c ist ebenfalls vollständig bezüglich der Supremumsnorm.* ⋊

⟪⟪⟪ Eine Cauchyfolge $(\mathfrak{a}_m)$ in c_0 ist auch eine Cauchyfolge in c, besitzt somit einen Grenzwert $\mathfrak{a}$ in c aufgrund der Vollständigkeit von c. Wegen

$$|L\mathfrak{a}| = |L\mathfrak{a} - L\mathfrak{a}_m| = |L(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m)| \leqslant \|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m\|$$

für alle m ist $L\mathfrak{a} = 0$, also $\mathfrak{a}$ ebenfalls eine Nullfolge. Also konvergiert $(\mathfrak{a}_m)$ auch im Raum c_0. ⟫⟫⟫

Betrachte jetzt in c_0 die Menge aller Nullfolgen mit nur endlich vielen nicht-verschwindenden Folgengliedern:

$$c_{00} \coloneqq \{\mathfrak{a} = (a_n)_{n\geqslant 1} \in c_0 : a_n = 0 \text{ für fast alle } n\}.$$

Man sieht leicht, das dies ein Untervektorraum von c_0 ist.

47 **Satz** *Der Unterraum c_{00} mit der Supremumsnorm ist nicht vollständig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zum Beispiel definiert

$$\mathfrak{a}_m = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, .., \frac{1}{m-1}, 0, ..\right), \qquad m \geqslant 2,$$

eine Folge in c_{00}, die in c_0 gegen

$$\mathfrak{a} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$$

konvergiert, denn

$$\|\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}\| = 1/m \to 0.$$

Da aber $\mathfrak{a} \notin c_{00}$, hat die Folge $(\mathfrak{a}_m)_{m\geqslant 1}$ in c_{00} *keinen Grenzwert.* ⟩⟩⟩⟩⟩