4 Komplexe Zahlen

Wir haben bisher das Zahlengebäude

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

beschrieben. Von ›unten‹ betrachtet, werden die *ganzen Zahlen* als Erweiterung der natürlichen Zahlen eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$m + x = n$$

innerhalb dieses Zahlensystems lösen zu können. Die *rationalen Zahlen* werden eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$mx = n$$

für $m \neq 0$ lösen zu können. Die rationalen Zahlen werden zu dem angeordneten Körper der *reellen Zahlen* vervollständigt, um unter anderem die quadratische Gleichung

$$x^2 = a$$

für alle $a \geqslant 0$ lösen zu können.

Mehr ist allerdings auch nicht möglich! Denn in jedem angeordneten Körper gilt ja $x^2 \geqslant 0$. Eine Gleichung wie

$$x^2 = -1$$

ist dort *unerfüllbar*. Trotzdem bleibt das Bedürfnis, auch diese Gleichung ›irgendwie zu lösen‹. Dies führt zur Erweiterung der reellen Zahlen zu den *komplexen Zahlen*, und damit zu einer weiteren Stufe des Zahlengebäudes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dieser *Erweiterungskörper* $\mathbb{C}$ kann allerdings nicht mehr angeordnet sein.

4.1 Vorüberlegungen

Angenommen, es gibt irgendeinen größeren Körper $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ mit einem gewissen Element, nennen wir es einmal i, so dass

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Dann ist jedenfalls $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Ferner gehören zu $\mathbb{K}$ auch alle Ausdrücke der Form

$$z \coloneqq x + y\mathrm{i}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind der *Realteil* $\Re z \coloneqq x$ und der *Imaginärteil* $\Im z \coloneqq y$ eindeutig durch z bestimmt. Denn ist $x + y\mathrm{i} = u + v\mathrm{i}$, so ist

$$x - u = (v - y)\mathrm{i}.$$

Wäre $v \neq y$, so könnten wir diese Gleichung umformen zu

$$\mathrm{i} = \frac{x - u}{v - y}.$$

Dann aber wäre i eine reelle Zahl – ein Widerspruch. Also ist $v = y$ und damit auch $x = u$.

Setze jetzt

$$\mathbb{C} \coloneqq \{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{K} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für Summe und Produkt zweier Elemente $z = x + y\mathrm{i}$ und $w = u + v\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$ gilt dann notwendigerweise

$$\begin{aligned} z + w &= (x + y\mathrm{i}) + (u + v\mathrm{i}) \\ &= (x + u) + (y + v)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} zw &= (x + y\mathrm{i})(u + v\mathrm{i}) \\ &= xu + xv\mathrm{i} + yu\mathrm{i} + yv\mathrm{i}^2 \\ &= (xu - yv) + (xv + yu)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wiederum Elemente von $\mathbb{C}$.

Behauptung *Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.* ⋊

⟪⟪ Zum Beispiel sind $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0\mathrm{i}$ und $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0\mathrm{i}$ die Null und Eins in $\mathbb{C}$. Für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ ist ferner

$$z^{-1} = \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{i}$$

wegen $x^2 + y^2 \neq 0$ ein wohldefiniertes Element in $\mathbb{C}$. Durch Multiplikation mit z verifiziert man, dass dies tatsächlich das multiplikativ Inverse zu z ist.

Sind also z und w in $\mathbb{C}$, so sind es auch $z+w$, zw, $-z$ und z^{-1} für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Die Körperoperationen führen also nicht aus $\mathbb{C}$ heraus. Da die Körperaxiome nach Voraussetzung in $\mathbb{K}$ gelten, gelten sie damit auch in $\mathbb{C}$. ⟫⟫

Gibt es also überhaupt einen Erweiterungskörper $\mathbb{K}$ von $\mathbb{R}$ mit der gewünschten Eigenschaft, so enthält dieser immer den Körper $\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$. Damit ist allerdings noch nichts über dessen *Existenz* gesagt. Wir kommen nicht umhin, einen solchen Körper explizit zu konstruieren – wobei wir uns natürlich von unseren Vorüberlegungen leiten lassen.

4.2 Konstruktion der komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Wir *definieren*

$$(x, y) \oplus (u, v) \coloneqq (x + u, y + v),$$
$$(x, y) \odot (u, v) \coloneqq (xu - yv, xv + yu).$$

Dann verifiziert man:

(i) $\oplus$ und $\odot$ sind assoziativ und kommutativ.
(ii) Es gilt das Distributivgesetz.
(iii) Es ist $0_{\mathbb{K}} = (0, 0)$ und $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$.
(iv) Die inversen Elemente sind $-(x, y) = (-x, -y)$ und

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right), \qquad (x, y) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Das Ergebnis lautet somit:

1 **Satz** $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ *ist ein Körper.* ⋊

Bemerkung Ganz ähnlich verfährt man übrigens bei der Konstruktion der ganzen aus den natürlichen Zahlen, und der rationalen aus den ganzen Zahlen. Statt ›Zahlen‹ betrachtet man Zahlenpaare und definiert für diese Operationen, die die vertraute Addition und Multiplikation nachbilden. ⊸

Dieser Körper $\mathbb{K}$ erweitert $\mathbb{R}$ in folgendem Sinn. Die Abbildung

$$\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \varphi(x) = (x, 0)$$

ist injektiv und vertauscht mit den Operationen: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y), \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \odot \varphi(y). \end{aligned}$$

Wir können deshalb $\mathbb{R}$ mit dem *Unterkörper* $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{K}$ identifizieren. Setzen wir jetzt noch

$$\mathbf{1} \coloneqq (1, 0), \qquad \mathbf{i} \coloneqq (0, 1),$$

und schreiben im Folgenden wieder $+$ statt $\oplus$ und $\cdot$ statt $\odot$, so wird — und hier verwenden wir einige Konzepte aus der linearen Algebra —

$$(x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = x\,\mathbf{1} + y\,\mathbf{i}.$$

Mit anderen Worten: $\mathbf{1}$ und $\mathbf{i}$ sind *Basisvektoren* des zweidimensionalen reellen Vektorraumes $\mathbb{K}$, und $z = x + y\mathrm{i}$ ist eine kompakte Schreibweise für die Linearkombination $x\,\mathbf{1} + y\,\mathbf{i}$.

In diesem Körper gilt dann unter anderem

$$\mathbf{i}^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -\mathbf{1}.$$

Es ist also nichts Imaginäres dabei, dass das Quadrat eines Körperelements das additiv Inverse der Eins ergibt.

Von nun an schreiben wir für diesen Körper $\mathbb{C}$ und nennen ihn den *Körper der komplexen Zahlen*.

4.3 Einige elementare Eigenschaften

Geometrisch stellt man die Menge

$$\mathbb{C} = \{z = x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}\}$$

als Punkte in der *komplexen Ebene* dar. Der *Realteil* x wird auf der Abszisse, der *Imaginärteil* y auf der Ordinate abgetragen. Diese werden auch als die *reelle* und *imaginäre Achse* der komplexen Ebene bezeichnet.

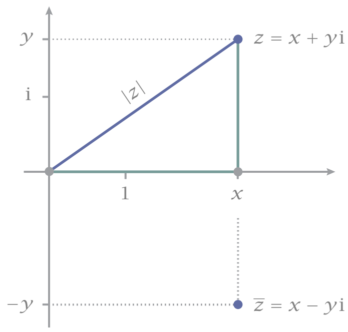
Eine komplexe Zahl z heißt *reell*, wenn ihr Imaginärteil verschwindet:

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \Im z = 0.$$

4.4

Abb 1

Komplexe Ebene, Konjugation und Betrag



Als *komplexe Konjugation* bezeichnet man die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sigma(x + y\mathrm{i}) = x - y\mathrm{i},$$

die z auf die zu ihr *komplex konjugierte Zahl* $\sigma(z)$ abbildet. Diese bezeichnet man üblicherweise mit

$$\overline{z} \coloneqq \sigma(z).$$

Geometrisch handelt es sich um die Spiegelung der komplexen Ebene an der reellen Achse.

2 **Rechenregeln für die komplexe Konjugation** *Für komplexe Zahlen gilt:*

(i) $\Re z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *und* $\Im z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$,

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$,

(iii) $\overline{\overline{z}} = z$,

(iv) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ *und* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$,

(v) $z\overline{z} = x^2 + y^2$ *mit* $x = \Re z$, $y = \Im z$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Mit $z = x + y\mathrm{i}$ ist zum Beispiel

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}((x + y\mathrm{i}) - (x - y\mathrm{i})) = y = \Im z.$$

(ii) Mit (i) gilt

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im z = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}.$$

(v) Mit $z = x + y\mathrm{i}$ ist

$$z\overline{z} = (x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = x^2 - (y\mathrm{i})^2 = x^2 + y^2.$$

Die übrigen Aussagen sind ebenso leicht zu beweisen. ⟩⟩⟩⟩⟩

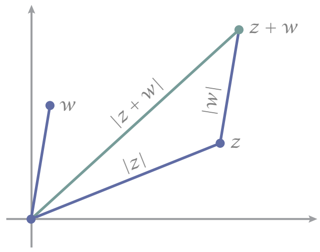


Abb 2

Dreiecksungleichung in der komplexen Ebene

Bemerkung Wegen (iv) ist die komplexe Konjugation σ ein *Automorphismus* von $\mathbb{C}$, also eine bijektive Abbildung, die mit den Körperoperationen vertauscht:

$$\sigma(z+w) = \sigma(z) + \sigma(w), \qquad \sigma(zw) = \sigma(z)\sigma(w).$$

Wegen (iii) ist dies außerdem eine *Involution*: es gilt

$$\sigma^2 = id$$

und damit auch $\sigma^{-1} = \sigma$. ⊸

▪ Betrag

Den Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x haben wir mithilfe der Ordnung der reellen Zahlen definiert. Eine solche Ordnung steht uns für die komplexen Zahlen nicht zur Verfügung, denn sowohl $\mathrm{i} > 0$ also auch $\mathrm{i} < 0$ führen sofort zu einem Widerspruch $_{\text{A-2.14}}$. $\mathbb{C}$ *ist also kein angeordneter Körper*. Interpretieren wir jedoch $|x|$ als *Abstand* des Punktes x zum Punkt 0, so können wir dies zu einem Betrag für komplexe Zahlen verallgemeinern.

Aufgrund des Satzes von Pythagoras ist $\sqrt{x^2+y^2}$ der euklidische Abstand des Punktes $z = x + y\mathrm{i}$ vom Nullpunkt in der komplexen Ebene. Andererseits ist $x^2 + y^2 = z\bar{z}$ $_2$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren wir daher

$$|z|_{\mathbb{C}} \coloneqq \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

als den *Betrag* der komplexen Zahl $z = x + y\mathrm{i}$. Ist z reell, also $\Im z = 0$, so gilt

$$|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} = |\Re z|_{\mathbb{R}}, \qquad \Im z = 0.$$

Somit ist der komplexe Betrag eine *Erweiterung* des reellen Betrags, und wir können hierfür wieder einfach $|\cdot|$ schreiben.

3 **Rechenregeln für den Betrag** *Für komplexe Zahlen gilt:*

(i) $|\Re z| \leqslant |z|$ *und* $|\Im z| \leqslant |z|$,

(ii) $|z| \geqslant 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(iii) $|\overline{z}| = |z|$,

(iv) $|z|^2 = z\overline{z}$,

(v) $|zw| = |z|\,|w|$,

(vi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Für $z = x + y\mathrm{i}$ ist zum Beispiel

$$|\Re z| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,.$$

Aussagen (ii), (iii) und (iv) sind einfach. Gleichung (v) folgt aus

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = z\overline{z}\,w\overline{w} = |z|^2\,|w|^2$$

und Wurzelziehen. Und für (vi) haben wir

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\overline{w}) + |w|^2\,, \end{aligned}$$

denn $w\overline{z} = \overline{z\overline{w}}$. Für den mittleren Term gilt mit (i), (iii) und (v)

$$|\Re z\overline{w}| \leqslant |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|\,.$$

Also erhalten wir

$$|z + w|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\,.$$

Wurzelziehen $_{2.11}$ ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

4.4 Fundamentalsatz der Algebra

Ausgangspunkt unserer Überlegungen war, eine Lösung von $x^2 + 1 = 0$ zu konstruieren. Tatsächlich haben wir viel mehr erreicht. Im Körper der komplexen Zahlen besitzt *jedes Polynom* eine Nullstelle. Polynome sind die einfachsten Funktionen, die sich übrigens in jedem Körper definieren lassen.

Definition *Ein Ausdruck der Gestalt*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + .. + a_1 z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, .., a_n \in \mathbb{C}$ *und* $a_n \neq 0$ *heißt (komplexes) Polynom vom Grad* n. *Das Polynom heißt reell, wenn alle Koeffizienten reell sind. Es heißt normiert, falls* $a_n = 1$. ⋊

▷ *Beispiel* a. Eine Konstante $a_0 \neq 0$ ist ein Polynom vom Grad 0.

b. Eine lineare Funktion $mx + b$ mit $m \neq 0$ ist ein Polynom vom Grad 1.

c. $x^2 + px + q$ ist ein normiertes quadratisches Polynom.

d. Die Konstante 0 ist streng genommen *kein Polynom*. Es wird sich jedoch als sinnvoll erweisen, dies als *Nullpolynom* zu definieren und ihm den Grad $-\infty$ zuzuweisen. ◁

Ein Polynom auf $\mathbb{C}$ definiert eine Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Umgekehrt sind durch diese Funktion auch die Koeffizienten des Polynoms eindeutig bestimmt. Dies ist Methode des Koeffizientenvergleichs. In *endlichen* Körpern gilt der folgende Satz übrigens nicht A-10 !

4 **Methode des Koeffizientenvergleichs** *Zwei Polynome auf* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *sind als Funktionen gleich genau dann, wenn ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Dies folgt durch Induktion über den Polynomgrad A-9 . ⟩⟩⟩⟩

Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Nullstelle* eines Polynoms p, falls

$$p(a) = 0.$$

Die einfachsten Fälle sind uns vertraut. Jede lineare Gleichung $mx + b = 0$ mit $m \neq 0$ besitzt genau eine Nullstelle $x_0 = -b/m$. Für die Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

lernt man – hoffentlich – die *Mitternachtsformel*

$$x_\pm = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Diese sind reell und verschieden für $p^2 > 4q$, reell und doppelt für $p^2 = 4q$, und komplex konjugiert für $p^2 < 4q$.

Ähnliche, allerdings wesentlich kompliziertere und für praktische Zwecke kaum brauchbare Formeln gibt es für kubische und biquadratische Gleichungen.

Für polynomiale Gleichungen ab dem Grad 5 kann man jedoch beweisen, dass es solche algebraische Formeln *nicht gibt* – dies ist ein Resultat der Galois-Theorie.

Umso wichtiger ist es daher zu wissen, dass *jedes Polynom* überhaupt eine Nullstelle besitzt. Dies leistet der

5 **Fundamentalsatz der Algebra** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.* ⋊

Für diesen wichtigen Satz gibt es verschiedene Beweise. Den Standardbeweis werden wir im Rahmen der Funktionentheorie kennenlernen [1]. Im Reellen gilt dieser Satz dagegen nicht, denn $x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

Akzeptieren wir den Fundamentalsatz für den Augenblick, so können wir sofort noch mehr aussagen.

6 **Satz** *Ist a eine Nullstelle des normierten Polynoms p vom Grad $n \geqslant 1$, so ist*

$$p(z) = (z - a)q(z)$$

mit einem eindeutigen normierten Polynom q vom Grad $n - 1$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen zuerst, dass *für jedes beliebige* a die Gleichung

$$p(z) = (z - a)q(z) + c$$

mit einem normierten Polynom und einem gewissen c erfüllt werden kann. Mit

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$$

ist dies äquivalent mit $p(z) + aq(z) = zq(z) + c$, oder

$$z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + ab_k) z^k = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} z^k + c.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= 1, \\ b_{k-1} &= a_k + ab_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ c &= a_0 + ab_0. \end{aligned}$$

Somit sind die Koeffizienten $b_{n-1}, .., b_0, c$ eindeutig bestimmt. Ist nun a eine *Nullstelle* von p, so ist notwendigerweise $c = 0$, und es folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

[1] Dies ist die Theorie der *komplexen* differenzierbaren Funktionen, nicht der allgemeinen reellen Funktionen. Diese Bezeichnung hat historische Gründe.

Ist also a eine Nullstelle eines Polynoms p vom Grad n gefunden, so ist

$$q(z) = \frac{p(z)}{z-a}$$

ein *wohldefiniertes Polynom* vom Grad $n-1$, welches man durch *Polynomdivision* bestimmt.

Beispiel Das Polynom $z^3+2z^2-11z+6$ hat bei 2 eine Nullstelle. Polynomdivision ergibt

$$\begin{aligned}
&(z^3+2z^2-11z+9) : (z-2) = z^2+4z-3\\
&-(z^3-2z^2)\\
&\qquad 4z^2-11z+6\\
&\quad -(4z^2-8z)\\
&\qquad\qquad -3z+6\\
&\qquad\quad -(-3z+6).
\end{aligned}$$

Ist das Polynom q nicht konstant, so kann man wiederum den Fundamentalsatz anwenden. Nach $n = \operatorname{grad} p$ Schritten gelangt man somit zu folgendem Ergebnis.

7 **Satz** *Zu jedem normierten komplexen Polynom p vom Grad n existieren eindeutig bestimmmte komplexe Zahlen $z_1, .., z_n$, so dass*

$$p(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-z_k).$$

Diese z_i sind offensichtlich sämtliche Nullstellen von p. Dabei kann eine Nullstelle mehrfach auftreten, sogar maximal n mal. Erscheint sie $\mu \geqslant 1$ mal, so spricht man von einer *μ-fachen Nullstelle*. Sind also $z_1, .., z_r$ die *verschiedenen* Nullstellen von p mit *Vielfachheiten* $\mu_1, .., \mu_r$, so gilt

$$p(z) = \prod_{i=1}^{r} (z-z_i)^{\mu_i}, \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i = n.$$

Außerdem ist

$$q_i(z) \coloneqq \frac{p(z)}{(z-z_i)^{\mu_i}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

ein Polynom vom Grad $n-\mu_i$ mit $q_i(z_i) \neq 0$.

8 **Korollar** *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen. Stimmen zwei Polynome vom Grad n oder kleiner an $n+1$ verschiedenen Stellen überein, so sind sie gleich.*

⟪⟪⟪ Ein beliebiges nicht-normiertes Polynom vom Grad n hat die Gestalt

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot\cdot (z - z_n).$$

Gilt $p(z_0) = 0$ für ein z_0 verschieden von $z_1, .., z_n$, so sind alle z-Faktoren ungleich Null, und somit notwendigerweise $a_n = 0$. Stimmen zwei Polynome vom Grad n oder kleiner an $n + 1$ Stellen überein, so ist deren Differenz ein Polynom vom Grad n oder kleiner mit $n + 1$ Nullstellen. Also ist es das Nullpolynom. ⟫⟫⟫

Ein Polynom vom Grad n ist also nicht nur durch seine $n + 1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt, sondern auch durch seine Werte an $n + 1$ beliebigen verschiedenen Punkten. Umgekehrt können $n + 1$ Punkte in der kartesischen Zeichenebene mit unterschiedlichen Abszissen immer durch ein eindeutiges *Interpolationspolynom* vom Grad n oder kleiner *interpoliert* werden:

9 **Satz** *Zu $n + 1$ verschiedenen komplexen Stützstellen $a_0, .., a_n$ und $n + 1$ beliebigen Werten $c_0, .., c_n$ gibt es genau ein Polynom p mit $\operatorname{grad} p \leqslant n$ und*

$$p(a_i) = c_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Zu $n + 1$ verschiedenen Stützstellen definiert man die entsprechende Anzahl von *Lagrangepolynomen*

$$\lambda_k(z) = \prod_{i \neq k} \frac{z - a_i}{a_k - a_i}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Da die a_i paarweise verschieden sind, sind dies wohldefinierte Polynome von Grad n mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda_k(a_l) = \delta_{kl} \coloneqq \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Aus diesen ›Basispolynomen‹ kombinieren wir nun das gesuchte Polynom mit beliebigen Werten an den Stützstellen als

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_k.$$

Dann gilt:

$$p(a_l) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_k(a_l) = \sum_{k=0}^{n} b_k \delta_{kl} = c_l, \qquad 0 \leqslant l \leqslant n. \qquad ⟫⟫⟫$$