2

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der gesamten Analysis. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst Klarheit über dieses Fundament zu verschaffen.

Der *konstruktive* – und historisch korrekte – Zugang beginnt bei den natürlichen Zahlen und führt über die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Jedes Mal ist ein neues Zahlensystem auf dem vorangehenden aufzubauen, und es sind die gewünschten Eigenschaften nachzuweisen. Man erhält so ein tief gegründetes Fundament, doch ist die sorgfältige Ausführung langwierig, um nicht zu sagen langweilig. Auch trägt es unmittelbar wenig zum Verständnis der *eigentlichen* Analysis bei.

Der *axiomatische* – und hier beschriebene – Zugang zu den reellen Zahlen ist direkter. Er besteht darin, möglichst wenige Postulate – die sogenannten *Axiome* – zu formulieren, die den Ausgangspunkt für alle weiteren Schlüsse bilden. Diese Axiome werden nicht weiter hinterfragt. Sie mögen evident sein, wenn man sie auf eine bestimmte Vorstellung von den reellen Zahlen bezieht. Doch mathematisch gesehen ist dies unerheblich. Diese Axiome machen keine Aussage, was die reellen Zahlen *sind*. Sie legen nur fest, welche *Eigenschaften* sie haben. Und nur diese Eigenschaften sind für alles Folgende relevant. — Ziel dieses Kapitels ist die folgende

Charakterisierung der reellen Zahlen *Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen angeordneten Körper, der mit* $\mathbb{R}$ *bezeichnet wird.* ⋊

Im Einzelnen geht es um folgende Eigenschaften:

(i) Die reellen Zahlen bilden einen *Körper*.
(ii) Dieser Körper besitzt eine *Ordnungsstruktur*.
(iii) Und er ist – in einem noch zu definierenden Sinn – *vollständig*.

Wir brauchen nur eine Bezeichnung für diesen Körper, weil außerdem gilt:

(iv) Es gibt im Wesentlichen nur *einen* Körper mit diesen Eigenschaften.

Darum wird es in den nächsten Abschnitten gehen.

2.1 Die Körperaxiome

Zunächst einmal bilden die reellen Zahlen einen *Körper*. Das ist eine Menge, in der zwei Operationen erklärt sind, die üblicherweise als Addition und Multiplikation bezeichnet werden und die den folgenden *Körperaxiomen* genügen.

1 **Körperaxiome** *Eine Menge* $\mathbb{K}$ *mit zwei Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *, genannt Addition und Multiplikation, heißt Körper, wenn in ihm die folgenden Axiome gelten:*

die Axiome der Addition:

- (A-1) *Die Addition ist assoziativ und kommutativ,*
- (A-2) *Es gibt ein Element* $n \in \mathbb{K}$*, genannt neutrales Element der Addition, so dass* $x + n = x$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$*,*
- (A-3) *Zu jedem Element* $x \in \mathbb{K}$ *existiert ein Element* $\bar{x} \in \mathbb{K}$*, genannt das additiv Inverse zu* x*, so dass* $x + \bar{x} = n$*,*

die Axiome der Multiplikation:

- (M-1) *Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ,*
- (M-2) *Es gibt ein Element* $e \in \mathbb{K}$*,* $e \neq n$*, genannt neutrales Element der Multiplikation, so dass* $x \cdot e = x$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$*,*
- (M-3) *Zu jedem Element* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $x \neq n$ *existiert ein Element* $x' \in \mathbb{K}$*, genannt das multiplikativ Inverse zu* x*, so dass* $x \cdot x' = e$*,*

und das Distributivgesetz:

- (D) *Für alle* $x, y, z \in \mathbb{K}$ *gilt* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$. ⋊

Genauer ist ein Körper ein *Tripel* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ mit den oben genannten Eigenschaften. Ist aber klar, welche Operationen gemeint sind, spricht man einfach vom *Körper* $\mathbb{K}$.

Um Klammern zu sparen, vereinbart man, dass Punktoperationen stärker binden als Strichoperationen. Auch lässt man den Punkt für die Multpiplikation meist weg. Das Distributivgesetz lautet dann beispielsweise $x(y + z) = xy + xz$.

2 ⊳ *Beispiele für Körper* A. Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{n, e\}$ mit den Operationen

$$\begin{array}{c|cc} + & n & e \\ \hline n & n & e \\ e & e & n \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & n & e \\ \hline n & n & n \\ e & n & e \end{array}.$$

Interpretieren wir n als 0 und e als 1, so entspricht dies genau den üblichen Rechenregeln mit der einzigen Ausnahme, dass hier

$$1 + 1 = 0.$$

B. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper mit neutralen Elementen $n = 0$ und $e = 1$.

C. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bildet einen Körper – siehe Kapitel 4.

D. Eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten ist gegeben durch einen Ausdruck der Gestalt

$$\frac{a_m x^m + .. + a_1 x + a_0}{b_n x^n + .. + b_1 x + b_0}, \qquad m, n \geqslant 0,$$

mit $a_0, .., a_m, b_0, .., b_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \neq 0$. Die Menge $\mathbb{M}$ dieser Funktionen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper.

Aus den Axiomen *folgt*, dass die neutralen und die inversen Elemente eindeutig sind. Dies muss also nicht explizit gefordert werden.

3 **Satz** *In einem Körper sind die neutralen und inversen Elemente eindeutig bestimmt.*

Sei $\tilde{n}$ ein weiteres neutrales Element der Addition. Dann gilt (A-2) sowohl für n als auch für $\tilde{n}$. Zusammen mit (A-1) ergibt sich hieraus

$$\tilde{n} = \tilde{n} + n = n + \tilde{n} = n,$$

also $\tilde{n} = n$. Damit ist die Eindeutigkeit des neutralen Elementes gezeigt.

Ist $\tilde{x}$ neben $\bar{x}$ ein weiteres additiv Inverses zu x, so folgt aus $x + \bar{x} = n$ und $x + \tilde{x} = n$ sowie (A-1)

$$\tilde{x} = \tilde{x} + n = \tilde{x} + (x + \bar{x}) = \bar{x} + (x + \tilde{x}) = \bar{x} + n = \bar{x}.$$

Entsprechend argumentiert man für die Multiplikation.

4 **Satz** *In einem Körper $\mathbb{K}$ besitzt jede Gleichung*

(i) $a + x = b$ *die eindeutige Lösung* $x = \bar{a} + b$,

(ii) $ax = b$ *mit* $a \neq 0$ *die eindeutige Lösung* $x = a'b$.

(i) Wegen

$$a + (\bar{a} + b) = (a + \bar{a}) + b = n + b = b$$

ist $x = \bar{a} + b$ eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Ist $\tilde{x}$ eine weitere Lösung dieser Gleichung, so folgt nach Addition von $\bar{a}$, dass

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = \bar{a} + b.$$

Auf der linken Seite steht aber

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = (\bar{a} + a) + \tilde{x} = n + \tilde{x} = \tilde{x}.$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elementes ist also $\tilde{x} = \bar{a} + b = x$. — Für (ii) argumentiert man analog.

▪ Rechenregeln

Es folgen einige elementare Rechenregeln, die wir von den rationalen Zahlen aus der Schule kennen, die aber tatsächlich in jedem beliebigen Körper gelten.

5 **Rechenregeln** *In einem Körper* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $\bar{\bar{x}} = x$,

(ii) $n \cdot x = n$,

(iii) $\bar{e} \cdot x = \bar{x}$,

(iv) $(x')' = x \quad \text{für} \quad x \neq n$,

(v) $xy = n \quad \Rightarrow \quad x = n \vee y = n$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Aus

$$\bar{x} + x = x + \bar{x} = n$$

folgt, dass x das additive Inverse zu $\bar{x}$ ist. Also ist $\bar{\bar{x}} = x$.

(ii) Es ist $n = n + n$, und mit dem Distributivgesetz

$$n \cdot x = (n + n) \cdot x = n \cdot x + n \cdot x.$$

Addition des additiv Inversen von $n \cdot x$ auf beiden Seiten ergibt $n = n \cdot x$.

(iii) Mit (ii) ist

$$n = n \cdot x = (e + \bar{e}) \cdot x = e \cdot x + \bar{e} \cdot x = x + \bar{e} \cdot x.$$

Also ist $\bar{e} \cdot x$ das additiv Inverse zu x, also $\bar{x}$.

(iv) Analog zu (i).

(v) Sei $xy = n$. Ist $x = n$, so sind wir fertig. Ist $x \neq n$, so können wir die Gleichung mit x' multiplizieren, und mit (ii) folgt $y = n \cdot x' = n$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bis jetzt haben wir sehr abstrakt über Körper gesprochen, um deren elementare Eigenschaften ohne jede vorgefasste Vorstellung von Zahlen und deren Arithmetik aus den Axiomen abzuleiten. Im Folgenden beschäftigen wir uns allerdings vor allem mit den reellen Zahlen. Daher identifizieren wir nun

$$\begin{array}{lll} n \rightsquigarrow 0, & \quad & \bar{x} \rightsquigarrow -x, \\ e \rightsquigarrow 1, & \quad & x' \rightsquigarrow x^{-1} = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Regel (i) wird damit zu $-(-x) = x$, und Regel (iii) zu $(-1) \cdot x = -x$. Beides zusammen ergibt die bekannte Regel

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1.$$

Dies ist also kein Mysterium, sondern Konsequenz der Axiome.

Wegen (v) ist ferner ein Produkt nur dann 0, wenn wenigstens ein Faktor 0 ist. Man sagt, ein Körper ist *nullteilerfrei*.

2.4

Ferner vereinbart man die Schreibweisen

$$x - y \coloneqq x + (-y) = x + \bar{y},$$

und

$$\frac{x}{y} \coloneqq x/y \coloneqq xy^{-1} = xy'.$$

Dies führt zu den üblichen

▷ *Regeln des Bruchrechnens* Es gilt zum Beispiel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \text{falls} \quad bd \neq 0.$$

Denn aus den Axiomen folgt

$$\begin{aligned}(ab^{-1} + cd^{-1})(bd) &= ab^{-1}bd + cd^{-1}bd \\ &= ab^{-1}bd + cd^{-1}db = ad + bc.\end{aligned}$$

Somit ist $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1}$, und das ist die Behauptung. ◁

2.2 Die Anordnungsaxiome

Reelle Zahlen kann man nicht nur addieren und multiplizieren, man kann sie auch hinsichtlich ihrer Größe vergleichen. Sie bilden eine *total geordnete Menge.* — Die folgende Definition entspricht der Charakterisierung einer totalen Ordnung im Trichotomiesatz 1.13.

Definition *Eine total geordnete Menge ist eine Menge M mit einer Relation, üblicherweise mit $<$ bezeichnet, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Trichotomie: Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt genau eine der Aussagen*

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

(ii) *Transitivität: Für $a, b, c \in M$ gilt*

$$a < b \wedge b < c \quad \Rightarrow \quad a < c. \qquad \rtimes$$

Genauer ist eine total geordnete Menge ein *Paar* $(M, <)$, bestehend aus einer Menge M und einer totalen Ordnung $<$ auf ihr. Ist klar, welche Ordnung gemeint sind, spricht man einfach von der *total geordneten Menge* M.

▷ *Beispiele* A. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ mit dem üblichen $<$ sind total geordnet.

B. Die Potenzmenge einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist bezüglich $\subsetneq$ *nicht* total geordnet. ◁

Eine totale Ordnung eines *Körpers* ist allerdings nur interessant, wenn sie sich mit den Körperoperationen verträgt. Dies fordern die folgenden Axiome.

Anordnungsaxiome *Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt angeordnet, wenn er durch eine Relation $<$ total geordnet wird, so dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:*

(O-1) $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$,

(O-2) $0 < a \wedge 0 < b \quad \Rightarrow \quad 0 < ab$. ⋊

Ein *angeordneter Körper* ist also genauer ein *Quadrupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ aus einem Körper $\mathbb{K}$ mit Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und totaler Ordnung $<$. Sind alle diese Bestandteile aus dem Kontext klar, sprichen wir einfach vom *angeordneten Körper* $\mathbb{K}$.

▷ *Beispiel* A. Der Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ [2] kann *nicht* angeordnet werden. Denn wäre $0 < 1$, so wäre wegen (O-1) auch

$$1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 0,$$

ein Widerspruch. Dasselbe geschieht mit der Annahme $1 < 0$.

B. Der Körper $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung ist angeordnet.

C. Im Körper $\mathbb{M}$ der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten [2] wird eine totale Ordnung definiert, wenn man Funktionen mit $a_n b_m > 0$ als positiv definiert [A-15].

D. Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden [A-14]. ◁

Noch etwas Notation und Terminologie. Man definiert

$$a \leqslant b \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \vee a = b$$

sowie $a > b$ und $a \geqslant b$ in offensichtlicher Weise. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt

- *positiv*, falls $a > 0$,
- *nichtnegativ*, falls $a \geqslant 0$,
- *nichtpositiv*, falls $a \leqslant 0$, und
- *negativ*, falls $a < 0$.

Dies dürfte nicht weiter überraschen.

Es folgen einige Rechenregeln für Ungleichungen in angeordneten Körpern, die für die reellen Zahlen ebenfalls wohlvertraut sind.

6 **Rechenregeln** *In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt:*

(i) $a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0 \;\Leftrightarrow\; -a < -b$,

(ii) $a > b \wedge c > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$,

(iii) $a > b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$,

(iv) $a \neq 0 \;\Rightarrow\; a^2 := aa > 0$,

(v) $a > 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} > 0$,

(vi) $1 > 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Addition von $-b$ mit (o-1) ergibt

$$a > b \;\Rightarrow\; a - b > b - b = 0.$$

Addition von $-a$ mit (o-1) ergibt dann

$$a - b > 0 \;\Rightarrow\; -b > -a.$$

Die umgekehrten Implikationen erhält man analog.

(ii) Mit (i) ist $a - b > 0$. Mit $c > 0$ und (o-2) folgt

$$(a - b)c = ac - bc > 0$$

und damit $ac > bc$.

(iii) Mit $c < 0$ ist $-c > 0$ wegen (i) und somit $-ac > -bc$ mit (ii). Nochmalige Anwendung von (i) liefert die Behauptung.

(iv) Ist $a \neq 0$, so ist entweder $a > 0$ oder $a < 0$. Im ersten Fall folgt

$$a^2 = aa > 0a = 0$$

mit (ii). Dasselbe erhält man im zweiten Fall mit (iii).

(v) Wäre $a > 0$ und $a^{-1} \leqslant 0$, so wäre wegen (iii) auch $aa^{-1} = 1 \leqslant 0$, ein Widerspruch.

(vi) Dies folgt aus (iv) mit $a = 1$ und $1 \cdot 1 = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wir müssen also $1 > 0$ nicht als Axiom fordern. Dies ist vielmehr bereits eine logische Folge der Axiome.

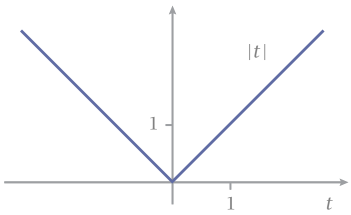
Betrag

Definition *In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ ist der Betrag $|a|$ eines Elementes definiert durch*

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geqslant 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$ ⋊

Abb 1

Graph der Betragsfunktion



Der Betrag ist also eine Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad a \mapsto |a| .$$

Für ihn gelten die folgenden Rechenregeln.

7 **Rechenregeln für den Betrag** *In einem angeordneten Körper gilt:*

(i) $|a| = |-a| \geqslant 0$,
(ii) $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$,
(iii) $|a| \geqslant a \geqslant -|a|$,
(iv) $|ab| = |a|\,|b|$,
(v) $|a| \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leqslant a \leqslant c$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Für $a > 0$ ist $-a < 0$ und somit

$$|a| = a = -(-a) = |-a| > 0.$$

Für $a < 0$ ist $-a > 0$ und deshalb

$$|a| = -a = |-a| > 0.$$

Und für $a = 0$ ist $|0| = 0 = |-0|$.

(ii) *Per definitionem* gilt $|0| = 0$. Ist andererseits $a \neq 0$, so ist auch $-a \neq 0$, und damit $|a| \neq 0$.

(iii) Für $a \geqslant 0$ ist

$$|a| = a \geqslant 0 \geqslant -a = -|a|,$$

und für $a \leqslant 0$ ist

$$|a| = -a \geqslant 0 \geqslant a = -|a|.$$

(iv) Dies zeigt man ebenso mit den entsprechenden Fallunterscheidungen.

(v) Mit (iii) folgt aus $|a| \leqslant c$ sowohl $a \leqslant c$ also auch $-c \leqslant -|a| \leqslant a$, also

$$-c \leqslant a \leqslant c.$$

Umgekehrt folgt hieraus $a \leqslant c$ und $-a \leqslant c$, also auch $|a| \leqslant c$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Aussage (v) wird oft angewendet in Form

$$|x - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \qquad \multimap$$

Die Bezeichnung für den folgenden Satz wird sich erst im Kontext der komplexen Zahlen erklären $_{4.3}$. Dort existiert eine ähnliche Betragsfunktion, auch wenn $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist.

8 **Dreiecksungleichung** *In einem angeordneten Körper gilt*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

sowie

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|\,. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ und $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$ folgt

$$-|a| - |b| \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|\,,$$

mit (v) somit $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Hieraus folgt weiter

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

und damit

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|\,.$$

Vertauschen wir a und b, so erhalten wir

$$|b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|\,.$$

Da einer der beiden linken Seiten gleich $\big||a| - |b|\big|$ sein muss, folgt auch die zweite Ungleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Bisher haben wir über die reellen Zahlen nichts gesagt, was nicht auch für die rationalen Zahlen gilt – sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R}$ sind *angeordnete Körper*. Die rationalen Zahlen haben aber den großen Nachteil, dass es von ihnen ›nicht genug gibt‹. So gibt es, wie wir gesehen haben $_{1.7}$, keine Wurzel aus 2. Man sagt auch, sie sind ›nicht vollständig‹.

Die Vollständigkeit eines angeordneten Körpers definieren wir durch die Existenz des Supremums und Infimums nichtleerer beschränkter Teilmengen. Diese Begriffe sind in jeder total geordneten Menge erklärt.

Dazu ist es bequem, die $<$-Notation zu erweitern. Für Teilmengen A, B und Elemente b einer total geordneten Menge erklären wir

$$A < b \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ für alle } a \in A,$$
$$A < B \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Entsprechend sind $A \leqslant c$ und $A \leqslant B$ erklärt.

Definition *Sei M eine total geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $b \in M$ gibt, so dass $A \leqslant b$. Jedes solche $b \in M$ heißt eine obere Schranke von A.* ⋊

Gibt es unter allen oberen Schranken einer Menge eine kleinste, so nennt man sie das *Supremum* dieser Menge. Die genaue Definition ist folgende. Dabei steht $\nleqslant$ für *nicht kleiner gleich*.

Definition *Sei M eine total geordnete Menge und $A \subset M$. Gilt $A \leqslant b$, aber $A \nleqslant \beta$ für jedes $\beta \in M$ mit $\beta < b$, so heißt b die kleinste obere Schranke oder das Supremum von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet.* ⋊

Das Supremum von A ist also eine obere Schranke von A, die nicht mehr verbessert werden kann. Für jede obere Schranke b von A gilt somit

$$A \leqslant \sup A \leqslant b,$$

und für jedes $\beta \in M$ mit $\beta < \sup A$ existiert ein $x \in A$ mit $\beta < x$.

Ein Supremum muss nicht existieren. Wenn es aber existiert, so ist es eindeutig A-18. Es wird aber nicht verlangt, dass dieses selbst zur Menge gehört.

Analog werden *nach unten beschränkt* und *untere Schranke* von A definiert. Existiert eine *größte untere* Schranke, so wird sie *Infimum* von A genannt und mit $\inf A$ bezeichnet. Für jede untere Schranke a von A gilt dann

$$a \leqslant \inf A \leqslant A,$$

und für jedes $\alpha \in M$ mit $\alpha > \inf A$ existiert ein $x \in A$ mit $x < \alpha$.

9 ▷ *Beispiele* A. Die leere Menge ist in jeder total geordneten Menge nach oben und unten beschränkt.

B. Jedes abgeschlossene Intervall – siehe Abschnitt 6 –

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad a \leqslant b,$$

ist nach oben und unten beschränkt, und es ist

$$a = \inf [a, b], \qquad b = \sup [a, b].$$

In diesem Fall gehören Supremum und Infimum also ebenfalls zu $[a, b]$.

c. Für jedes offene Intervalle

$$(a,b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad a < b,$$

gilt ebenfalls $a = \inf(a,b)$ und $b = \sup(a,b)$. In diesem Fall gehören diese aber *nicht* zu dem Intervall (a,b). ◂

Mit dem Begriff des Supremums formulieren wir nun das

10 **Vollständigkeitsaxiom** *Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt vollständig, wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$ ein Supremum besitzt.* ⋊

Die Bedeutung dieses Axioms illustrieren wir im nächsten Abschnitt. Damit haben wir nun alle Axiome versammelt, die wir für die Beschreibung der reellen Zahlen benötigen.

Charakterisierung der reellen Zahlen *Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen, angeordneten Körper, der mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird.* ⋊

In Abschnitt 3.3 skizzieren wir noch, dass alle vollständigen, angeordneten Körper zueinander *isomorph*, also *gleichgestaltig* sind und somit miteinander identifiziert werden können. Daher ist es gerechtfertigt, von *einem* solchen Körper zu sprechen und ihn mit einem einzigen Symbol, $\mathbb{R}$, zu bezeichnen.

2.4 Wurzeln

Eine erste Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom ist die Existenz einer Wurzel zu jeder positiven reellen Zahl. Die reellen Zahlen leisten also das, was die rationalen Zahlen nicht leisten. Gleichzeitig ergibt sich daraus, dass das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{Q}$ *nicht gilt*.

11 **Satz und Definition** *Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ existiert genau eine reelle Zahl $w > 0$ mit $w^2 = a$. Diese wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet und Quadratwurzel oder kurz Wurzel von a genannt. Für diese reelle Zahl gilt also*

$$w = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = a \wedge w > 0. \qquad ⋊$$

⟪⟪ Für reelle Zahlen $u > 0$ und $v > 0$ gilt A-19

$$u < v \quad \Leftrightarrow \quad u^2 < v^2. \tag{1}$$

Zwei verschiedene positive reelle Zahlen können daher nicht Wurzel derselben Zahl $a > 0$ sein. Dies zeigt die *Eindeutigkeit* der Wurzel.

Um ihre Existenz zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad a > 0,$$

denn die Quadrate beider Seiten ergeben $1/a$. Die Wurzel von $1/a$ ergibt sich also aus der Wurzel von a. Daher können wir uns im Folgenden auf den Fall $a \geqslant 1$ beschränken.

Sei also $a \geqslant 1$. Betrachte die Menge

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \wedge x^2 \leqslant a\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, denn wegen $0 \leqslant 1 = 1^2 \leqslant a$ gilt $1 \in A$. Sie ist auch beschränkt, denn für $a \geqslant 1$ ist $x^2 \leqslant a \leqslant a^2$, folglich auch $x \leqslant a$ wegen (1) und damit $A \leqslant a$. Also existiert aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die reelle Zahl

$$w = \sup A.$$

Zu zeigen ist, dass $w^2 = a$.

Dazu betrachten wir die reelle Zahl

$$v = w - \frac{w^2 - a}{w + a}. \tag{2}$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} v^2 &= w^2 - 2w\frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + (w^2 - a) - 2w\frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + \frac{w^2 - a}{(w + a)^2}\left\{(w + a)^2 - 2w(w + a) + (w^2 - a)\right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer vereinfacht sich zu $a^2 - a$. Wir erhalten also

$$v^2 = a + (w^2 - a)c \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{a^2 - a}{(w + a)^2} \geqslant 0. \tag{3}$$

Wäre nun $w^2 - a > 0$, so folgt mit (2) und (3)

$$v < w, \qquad a \leqslant v^2.$$

Damit aber wäre v eine bessere obere Schranke von A als dessen Supremum w, ein Widerspruch. Wäre andererseits $w^2 - a < 0$, so folgt

$$v > w, \qquad v^2 \leqslant a.$$

Damit wäre $v \in A$ und w keine obere Schranke von A, ebenfalls ein Widerspruch. Bleibt nur $w^2 - a = 0$, also $w^2 = a$, womit auch die *Existenz* der Wurzel aus a gezeigt ist. ⟫⟫⟫

Bemerkung Auf exakt dieselbe Weise kann man im angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ für die Menge

$$W = \{r \in \mathbb{Q} : r \geqslant 0 \wedge r^2 < 2\}$$

argumentieren. Hätte diese Menge ein Supremum *in* $\mathbb{Q}$, so wäre dies eine rationale Wurzel von 2. Da es eine solche aber nicht gibt, besitzt diese Menge in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. Somit gilt dort auch Vollständigkeitsaxiom *nicht*. ⊸

2.5 Die erweiterte Zahlengerade

Ist eine nichtleere Teilmenge A der reellen Zahlen nach oben beschränkt, so existiert deren Supremum als ein Element in $\mathbb{R}$. Dafür schreibt man auch gerne

$$\sup A < \infty.$$

Ist dagegen A nach oben *unbeschränkt*, so schreibt man dafür auch

$$\sup A = \infty.$$

Analoges gilt für $\inf A > -\infty$ und $\inf A = -\infty$.

Auch in vielen anderen Situationen sind die Symbole ∞ und $-\infty$ nützlich. Um deren Verwendung zu regeln, treffen wir folgende Vereinbarung.

Definition *Unter der erweiterten Zahlengerade versteht man die Menge*

$$\bar{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

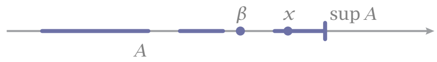
zusammen mit der Vereinbarung, dass $-\infty < x < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. ⋊

Das *Rechnen* mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ ist dagegen nur in einigen Fällen sinnvoll erklärbar ??. Es ist nicht möglich, $\bar{\mathbb{R}}$ zu einem *Körper* zu machen.

Die Definition des Supremums $\sup A$ einer Menge A beinhaltet, dass dieses von unten durch Elemente in A beliebig gut approximiert werden kann. Der

Abb 2

Zum Approximationssatz



folgende Satz formuliert diese Eigenschaft gleichermaßen für beschränkte und unbeschränkte Mengen. Vereinbaren wir außerdem

$$\sup \varnothing := -\infty, \qquad \inf \varnothing := \infty,$$

so gilt er sogar für die leere Menge.

12 **Approximationssatz** *Sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann existiert zu jeder reellen Zahl $\beta < \sup A$ ein $x \in A$ mit*

$$\beta < x \leqslant \sup A,$$

und zu jeder reellen Zahl $\alpha > \inf A$ existiert ein $x \in A$ mit

$$\inf A \leqslant x < \alpha.$$

Wir betrachten das Supremum. Für $A = \varnothing$ ist nichts zu zeigen, da es keine reelle Zahl $\beta < \sup A = -\infty$ gibt. Sei also $A \neq \varnothing$ und $\beta < \sup A$ eine beliebige reelle Zahl. Ist $\sup A < \infty$, so muss es aufgrund der Definition des Supremums ein $x \in A$ mit $\beta < x \leqslant \sup A$. Ist dagegen $\sup A = \infty$, so ist A nach oben unbeschränkt, und es muss erst recht ein $x \in A$ mit $\beta < x$ geben.

Ist also $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, so wird jede reelle Zahl unterhalb von $\sup A$ durch ein Element in A übertroffen. Man kann also $\sup A$ *innerhalb von A* beliebig gut approximieren – daher der Name *Approximationssatz*. Später werden wir zeigen, dass es sogar *Folgen* von Punkten in A gibt, die gegen das Supremum *konvergieren*. — Dasselbe gilt entsprechend für das Infimum.

2.6 Intervalle

Die wichtigsten Teilmengen der reellen Zahlen sind die Intervalle.

Definition *Ein Intervall ist eine Teilmenge der reellen Zahlen, die mit je zwei Punkten[1] auch alle dazwischen liegenden Punkte enthält.*

[1] *Punkt* meint hier also *Zahl*. Das ist eine übliche Redeweise.

▹ *Beispiele* A. Die leere Menge $\varnothing$ ist ein Intervall, denn die Voraussetzung, zwei Punkte in ihr zu finden, ist schon nicht erfüllt.

B. Ebenso ist jede 1-Punkt-Menge $\{a\}$ ein Intervall.

C. Enthält ein Intervall I wenigstens zwei Punkte $u < v$, so enthält es auch jede reelle Zahl a mit $u \leqslant a \leqslant v$. ◃

Für ein Intervall $I \neq \varnothing$ definieren wir

$$a = \inf I, \qquad b = \sup I$$

als dessen *linken* respektive *rechten Endpunkt*. Diese Punkte gehören zur *erweiterten* Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$, die Fälle

$$a = -\infty, \qquad b = \infty$$

sind also zugelassen. Ebenso kann $a = b$ sein. Ist $a < b$, so folgt aus dem Approximationssatz 12 und der Definition des Intervalls, dass auch die Menge $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ zu I gehört. Intervalle mit denselben Endpunkten unterscheiden sich daher nur darin, welche Endpunkte dazu gehören und welche nicht.

Definition *Ein nichtleeres Intervall I heißt links abgeschlossen, falls es seinen linken Endpunkt enthält, andernfalls heißt es links offen. Entsprechend sind rechts abgeschlossen und rechts offen erklärt. Schließlich heißt ein Intervall nichtentartet, wenn es mehr als einen Punkt enthält.* ⋊

Es gibt somit vier Arten von Intervallen: das *offene Intervall*

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \qquad -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty,$$

mit der Vereinbarung $(a,a) = \varnothing$; das *abgeschlossene Intervall*

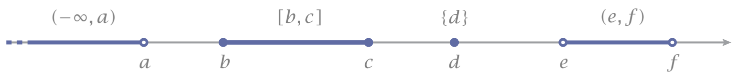
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad -\infty < a \leqslant b < \infty,$$

mit der Vereinbarung $[a,a] = \{a\}$; und die *halboffenen Intervalle*

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \qquad -\infty \leqslant a \leqslant b < \infty,$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, \qquad -\infty < a \leqslant b \leqslant \infty.$$

Dabei sind die Symbole ∞ und $-\infty$ genau dann zugelassen, wenn das betreffende Intervallende offen ist. Daher sind alle diese Intervalle Teilmengen von $\mathbb{R}$ und enthalten weder ∞ noch $-\infty$.

Abb 3 Verschiedene Intervalle



Beispiel A. Das leere Intervall $\varnothing$ ist sowohl offen wie abgeschlossen. [2]
B. Jede Ein-Punkt-Menge $\{a\} \subset \mathbb{R}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.
C. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ist ein offenes Intervall.
D. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *kein* Intervall.
E. Jedes von $(-\infty, \infty)$ verschiedene *unbeschränkte* Intervall ist von einem der vier Formen

$$(a, \infty), \quad [a, \infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Die *Länge* eines nichtleeren Intervalls I ist definiert als

$$|I| := \sup I - \inf I.$$

Dies wird vereinbarungsgemäß ∞ genau dann, wenn I unbeschränkt ist.

A. Ein Intervall I ist nichtentartet genau dann, wenn $|I| > 0$.
B. Es ist $|[a, a]| = 0$, und für $a < b$ gilt

$$|[a, b]| = |(a, b)| = b - a.$$

C. Mit der Vereinbarungen von Abschnitt 5 ist

$$|(-\infty, c)| = c - (-\infty) = c + \infty = \infty, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

[2] ›Offen‹ und ›abgeschlossen‹ schließen sich also nicht gegenseitig aus, im Gegensatz zum umgangssprachlichen Gebrauch.